

# Xấp xỉ B-Spline trên phản ứng động lực học của kết cấu nhịp lớn chịu tác dụng của tải trọng di động

Đỗ Nguyễn Văn Vương<sup>1,\*</sup>, Võ Đức Cẩm Hải<sup>2,3</sup>, Lê Tuấn Phương Nam<sup>1</sup>



Use your smartphone to scan this QR code and download this article

<sup>1</sup>Nhóm Nghiên cứu Kỹ thuật tính toán trong Xây dựng và kết cấu, Khoa kỹ thuật công trình, Đại học Tôn Đức Thắng, Thành Phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

<sup>2</sup>Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

<sup>3</sup>Khoa Toán-Tin học, Trường Đại học Tự nhiên, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

## Liên hệ

**Đỗ Nguyễn Văn Vương**, Nhóm Nghiên cứu Kỹ thuật tính toán trong Xây dựng và kết cấu, Khoa kỹ thuật công trình, Đại học Tôn Đức Thắng, Thành Phố Hồ Chí Minh, Việt Nam  
Email: dovanvuong28584@gmail.com

## Lịch sử

- Ngày nhận: 17-9-2020
- Ngày chấp nhận: 19-11-2020
- Ngày đăng: 04-12-2020

DOI: 10.32508/stdjns.v4i4.956



## Bản quyền

© ĐHQG Tp.HCM. Đây là bài báo công bố mở được phát hành theo các điều khoản của the Creative Commons Attribution 4.0 International license.



## TÓM TẮT

Phân tích động lực học của kết cấu dầm nhịp lớn chịu tác động của tải trọng xe cộ bằng xấp xỉ bậc cao được trình bày trong nghiên cứu này. Nghiên cứu áp dụng cách tiếp cận mới với các hàm cơ sở bậc cao B-Spline được đề xuất cho việc triển khai tính toán phản ứng động lực học của kết cấu. Nguyên lý D'Alembert được sử dụng để thiết lập hệ phương trình vi phân chuyển động của mô hình tương tác xe và dầm bằng phương pháp gia tốc trung bình sửa đổi trên lý thuyết của Newmark. Kỹ thuật góc xoay tự do được tích hợp vào trong phương trình tổng quát của dầm Euler-Bernoulli bởi việc sử dụng một biến chuyển vị nút mà không xem xét biến góc xoay trong tính toán. Việc kiểm tra và đánh giá đối với phương pháp đề xuất có xét tải trọng xe mang khối lượng tương tác được thực hiện thông qua lời giải chính xác. So sánh với hầu hết các phương pháp phần tử hữu hạn thông thường và lời giải giải tích sẵn có, phương pháp nghiên cứu với kỹ thuật góc xoay tự do trên hàm bậc cao B-Spline đã chỉ ra rằng đây là cách tiếp cận hiệu quả trong việc mô phỏng tương tác giữa kết cấu dầm nhịp lớn và hệ thống xe. Thông qua các kết quả số thu được, nghiên cứu này đưa ra các khuyến nghị và biện pháp phù hợp nhằm giảm thiểu tác động của phương tiện lên các kết cấu nhịp lớn, đồng thời rút ngắn được chi phí, thời gian tính toán khi phân tích và kiểm định cho loại kết cấu này.

**Từ khóa:** Công thức Euler-Bernoulli, phản ứng động, hệ thống xe, Hàm cơ sở B-Spline, Kết cấu nhịp lớn, kỹ thuật góc xoay tự do

## MỞ ĐẦU

Phản ứng động lực học của kết cấu dầm chịu tác dụng tải trọng di động đã được thực hiện trong hai thập kỷ qua. Kết cấu dầm đơn giản hầu hết được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như kỹ thuật cơ khí, dân dụng, hàng không vũ trụ v.v, trong đó các kết cấu kỹ thuật đều chịu tải trọng thay đổi theo không gian và thời gian. Tải trọng di động có ảnh hưởng đáng kể đến các ứng xử động gây ra bởi nhiều vấn đề liên quan như khối lượng, độ võng thẳng đứng và điều kiện nền đàn hồi cũng đã được chỉ ra trong nghiên cứu<sup>1</sup>. Hiện nay có rất nhiều cách tiếp cận khác nhau dựa trên phương pháp số, giải tích và kết quả từ các phương pháp này có thể xem như cơ sở chính để đánh giá phản ứng động lực học cho nhiều loại kết cấu phức tạp chịu tác dụng của tải trọng di động<sup>2</sup>. Điển hình là các lời giải chính xác khi xem xét phản ứng động của dầm ứng suất trước lệch tâm có sử dụng giảm chấn được thực hiện bởi M. Simsek và T. Kocaturk<sup>3</sup>. Song<sup>4</sup> đã tính toán mức độ ổn định và dao động của dầm Euler - Bernoulli vô hạn nằm trên nền Winkler đàn hồi chịu tác dụng của tải trọng tĩnh dọc trục và tải trọng di động có biên độ dao động biến thiên không đổi hoặc điều hòa. Các đánh giá động lực học trên dầm bao gồm sự kết hợp của

khối lượng tải trọng và khối lượng dầm đã được chỉ ra trong các nghiên cứu của Mechaltsos và cộng sự<sup>2</sup>. Wang và Chou<sup>5</sup> đã đề xuất lý thuyết biến dạng lớn để thiết lập phương trình vi phân chuyển động trên dầm Timoshenko do tác dụng kép của ngoại lực với trọng lượng của dầm. Cho và Song<sup>6</sup> đã đánh giá tương tác của hệ thống cầu-xe sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn trên ba phương (3D) do ảnh hưởng bởi hình dạng phức tạp của tháp và cáp. Thông qua hầu hết các nghiên cứu, có thể nhận thấy rằng phương pháp phần tử hữu hạn tồn tại một số hạn chế khi phân tích phản ứng động do tải trọng xe tương tác trên kết cấu. Các kết quả số liên quan đến chỉ số động học đạt được bằng kỹ thuật tích phân trực tiếp kết hợp với biện pháp rời rạc phần tử, tuy nhiên, phương pháp thực hiện này có thể dẫn đến kết quả thiếu chính xác<sup>7</sup>, công kênh khi tải trọng di động xét ở các mức tốc độ khác nhau gần với tần số cộng hưởng của dầm. Có thể thấy rằng khi mô phỏng tương tác giữa dầm và tải trọng mang khối lượng di động, vận tốc của xe và gia tốc của khối lượng tại bề mặt tiếp xúc đòi hỏi điều kiện các đạo hàm phải có bậc cao hơn khi sử dụng các hàm cơ sở bậc thấp trên phương pháp phần tử hữu hạn. Điều này, đồng thời dẫn đến việc tạo ra ma trận độ cứng bất đối xứng có thể gây nhiều khó khăn trong phân

**Trích dẫn bài báo này:** Vương D N V, Hải V D C, Nam L T P. Xấp xỉ B-Spline trên phản ứng động lực học của kết cấu nhịp lớn chịu tác dụng của tải trọng di động. *Sci. Tech. Dev. J. - Nat. Sci.*; 4(4):888-900.

tích số. Trong nghiên cứu này, việc phát triển bài toán tương tác trên hệ dầm và xe dựa trên xấp xỉ của hàm cơ sở B-spline đã khắc phục các hạn chế trên, cũng như xem xét điều kiện liên tục  $C^1$  ở trường chuyển vị tổng quát, đây hầu như là một nhiệm vụ không dễ thực hiện trong phương pháp phần tử hữu hạn thông thường (FEM) liên quan đến các bài toán xấp xỉ bậc bốn. Lý thuyết tính toán đã được xây dựng thông qua hàm bậc ba B-Spline trên cơ sở chỉ xét duy nhất một bậc tự do của chuyển vị thẳng đứng tại mỗi nút bằng kỹ thuật góc xoay tự do<sup>8,9</sup> thay vì hai bậc tự do bao gồm chuyển vị đứng và góc xoay như phân tích trong phương pháp phần tử hữu hạn trước đây.

Kỹ thuật này giúp giảm đáng kể thời gian và chi phí trong việc tính toán các bài toán phân tích ứng xử động. Để chứng minh tính hiệu quả của phương pháp B-Spline, nghiên cứu trước hết tập trung đánh giá cho bài toán đơn giản với hệ tải trọng di động một trục có xét hoặc không xét đến khối lượng chuyển động trên dầm đàn hồi. Vấn đề thứ hai là đánh giá phương pháp B-spline bậc cao trên hệ thống kết cấu phức tạp hơn của dầm và cáp liên hợp chịu hệ tải trọng di động gồm nhiều bậc tự do nhằm mục đích chứng minh tính ổn định của phương pháp trong việc dự đoán phản ứng động của kết cấu nhịp lớn. Dựa trên các kết quả tính toán, phương pháp xấp xỉ mới trên hàm cơ sở B-spline có thể xem như là phương pháp tính toán hiệu quả và khả thi trong việc nâng cao độ chính xác cũng như tốc độ hội tụ của kết quả. Do vậy có thể xem việc sử dụng hàm bậc cao B-Spline như cách tiếp cận đầy hứa hẹn bởi việc tính toán thông qua các ví dụ sẽ để chứng minh tính ứng dụng cao của phương pháp này.

## XÂY DỰNG CÔNG THỨC DỰA TRÊN HÀM BẬC BA B-SPLINE

### Hàm cơ sở B-Spline

Để xây dựng hàm cơ sở B-Spline, vấn đề quan trọng đầu tiên là số điểm điều khiển  $n$  và bậc đa thức cần được sử dụng để mô tả hàm cơ sở B-Spline, trong khi đó vấn đề thứ hai cần xem xét là vec tơ knot  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ , đây là một chuỗi các giá trị không giảm của  $\xi \in R, i = 1, \dots, n + p$ , trong đó  $\xi_i$  là knot thứ  $i$  trong không gian tham số. Vec tơ knot được gọi là vec tơ khi knot đầu tiên và knot cuối được lặp lại  $p+1$  lần<sup>10</sup>. Hàm cơ sở B-Spline là hàm liên tục  $C^{p-1}$  tại các knot đơn trong khi hàm liên tục  $C^p$  bên trong mỗi knot span.

Hàm cơ sở B-spline của  $N_{i,p}(\xi)$  với bậc  $p$  bắt đầu ở  $p = 0$  được biểu diễn theo công thức đệ quy sau:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{khi } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}, \\ 0 & \xi \notin [\xi_i, \xi_{i+1}]. \end{cases} \quad (1)$$

Khi  $p \geq 1$ , công thức đệ quy có thể được định nghĩa bởi

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2)$$

### Công thức dầm Euler-Bernoulli

Trường chuyển vị  $u$  được xem xét trên dầm Euler-Bernoulli như sau

$$u^h(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i(\xi) q_i \quad (3)$$

Trong đó  $R_i$  là hàm cơ sở bậc cao,  $n$  là số hàm cơ sở B-Spline tại các điểm nút điều khiển,  $q_i = w_i$  là bậc tự do tại nút ở các điểm điều khiển  $i$

$$\varepsilon_p^T = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4)$$

Thay phương trình (4) vào phương trình (1), các biến dạng trong mặt phẳng có thể được trình bày bởi công thức.

$$\varepsilon_p^T = \sum_{i=1}^n R_{i,xx}^T(\xi) q_i = \sum_{i=1}^n B_i^T q_i \quad (5)$$

Phương trình phản ứng động lực học được xem xét trên phân tích dao động tự do có thể được suy ra từ điều kiện dạng yếu sau:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_p^T E I \varepsilon_p d\Omega = \int_{\Omega} \delta u p A u d\Omega. \quad (6)$$

### Phương trình tương tác xe và dầm

Xem xét hệ tương tác của dầm đàn hồi đối với tải trọng di động mang khối lượng, phương trình tổng quát của dao động được rời rạc theo công thức sau:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{f(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)\}. \quad (7)$$

Trong đó  $[M]$  là ma trận khối lượng,  $[C]$  là ma trận cản,  $[K]$  là ma trận độ cứng,  $\{f\}$  là vec tơ lực tương tác bao gồm tải trọng tập trung và các khối lượng,  $\{q\}, \{\dot{q}\}, \{\ddot{q}\}$  được định nghĩa lần lượt là các vec tơ gia tốc, vec tơ tốc độ và vec tơ chuyển vị.

Kết cấu dầm có chiều dài  $L$ , Momen quán tính  $I$  và diện tích mặt cắt ngang không đổi  $A$ . Thông số vật liệu bao gồm Mo đun đàn hồi  $E_g$  và trọng lượng riêng của dầm  $\rho_g$ . Chú ý rằng hệ thống tải trọng di động được giả định luôn tương tác trên bề mặt dầm.

Phương trình tổng quát hệ tương tác giữa dầm và tải trọng di động một trục mang khối lượng sử dụng hàm cơ sở bậc cao B-Spline có thể được viết theo công thức sau:

$$m_1 \ddot{w}_1 + c_1 (\dot{w}_1 - \dot{w}_2) + k_1 (w_1 - w_2) = 0, \quad (8)$$

và

$$m_2 \ddot{w}_2 - c_1 (\dot{w}_1 - \dot{w}_2) - k_1 (w_1 - w_2) + k_2 (w_2 - w_3) = 0. \quad (9)$$

Trong đó  $w_1, w_2, w_3$  là các chuyển vị đứng của khối lượng được chỉ ra tại các vị trí tính,  $k_1, k_2$  là độ cứng đàn hồi của nhíp xe và bánh xe và  $c_1$  là hệ số cản nhớt trong hệ thống nhíp xe. Hình 1 thể hiện mô hình tương tác của xe trên cầu bao gồm hai khối lượng chuyển vị đứng và hai bậc tự do (2 DOFs) của mô hình xe.

Chú ý biến dạng trên dầm đàn hồi và điểm tiếp xúc của tải trọng thông qua chuyển vị  $w_3$  được bỏ qua, do đó chuyển vị ở các điểm tiếp xúc là cân bằng với nhau.

### Độ cứng đàn hồi của cáp

Độ cứng cáp thứ  $i^{th}$  có thể được lý tưởng hóa bởi công thức được đề xuất trong tham khảo <sup>11</sup>

$$k_i^c = \frac{E_i A_i \sin^2 \alpha_i}{L_i} \quad (10)$$

Trong đó là diện tích mặt cắt ngang của cáp thứ  $i^{th}$ ,  $M_0$  đơn đàn hồi tương đương của mỗi cáp  $E_i$  có thể được xem xét qua công thức sau:

$$E(x) = E_i = \frac{E_c}{1 + \frac{\gamma_c^2 x^2}{12 \sigma_0^3} E_c}, \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}. \quad (11)$$

Trong đó  $E_c$  là mô đun đàn hồi của cáp thẳng,  $\gamma_c$  là trọng lượng riêng của cáp,  $\sigma_0$  là ứng suất chảy dẻo.

## CÁC KẾT QUẢ SỐ

### Đánh giá kết quả của tải trọng di động một trục trên dầm đàn hồi

Ví dụ đầu tiên được trình bày thông qua các ứng xử động của dầm giản đơn chịu tải trọng tập trung di động, trong đó ảnh hưởng của các điều kiện quán tính do khối lượng xe là không đáng kể. Thông số của dầm bao gồm chiều dài  $L = 34m$ , trọng lượng trên một mét dài  $m = 11400kg/m$  và độ cứng chịu uốn  $EI = 9.92 \times 10^{10} Nm^2$ . Tải trọng tập trung xem xét với độ lớn là  $347000 N$  và tốc độ tới hạn  $v_{cr} = \pi/L \sqrt{EI/m}$ . Các ma trận độ cứng, ma trận khối lượng tương thích được biến đổi từ hàm cơ sở B-Spline bậc 3. Hệ dầm đàn hồi được rời rạc bởi  $m$  nút tương ứng với số điểm điều khiển trên  $m - p$  phần tử dầm, trong đó  $p$  là bậc của hàm cơ sở B-spline.

Bảng 1 so sánh các kết quả hệ số độ vồng động (DAFd), hệ số này được xác định bằng tỷ số giữa độ vồng động lớn nhất chia cho độ vồng tĩnh lớn nhất tại giữa nhịp dầm. Kết quả cho thấy độ chính xác cao giữa lời giải chính xác <sup>12</sup>, phương pháp FEM <sup>13</sup> và

phương pháp xấp xỉ B-spline bậc cao. Điều này chỉ ra rằng phương pháp xấp xỉ phát triển đã được mô phỏng thành công khi kết hợp với các hàm cơ sở B-spline bậc cao.

**Bảng 1: Bảng so sánh hệ số động của chuyển vị tại giữa nhịp dầm.**

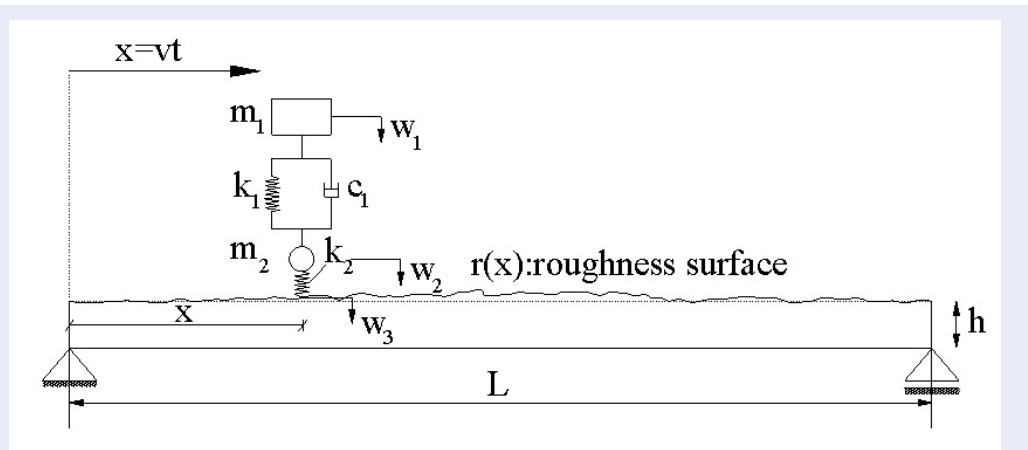
$T_f/\tau$	Impact factor		
	Giải tích <sup>12</sup>	FEM <sup>13</sup>	B-spline
0,1	1,050	1,053	1,05216
0,5	1,250	1,252	1,25857
1,0	1,707	1,705	1,70503
1,234	1,743	1,730	1,73250
1,5	1,710	1,704	1,70143
2,0	1,550	1,550	1,54792

Phương pháp B-Spline đã được chứng minh thêm bằng việc đánh giá thông qua dao động của dầm mỏng chịu tác dụng của tải trọng di động với tốc độ không đổi. Theo phương pháp này, các kết quả số thu được khi sử dụng hàm B-spline đã so sánh với các lời giải của phương pháp phần tử hữu hạn do Lin và Trethewey <sup>13</sup> đề xuất, kết quả là hoàn toàn trùng khớp như thể hiện trong Hình 2. Chú ý rằng, chuyển vị động tại điểm trung tâm của dầm dường như khá nhỏ và hầu như xấp xỉ với chuyển vị tĩnh (Static) thẳng đứng khi tải trọng di chuyển với tốc độ đủ nhỏ, cụ thể là đường cong của chuyển vị động được xem xét ở tham số tốc độ  $T_f/\tau = 0, 1$ . Chuyển vị của dầm đàn hồi được đánh giá ở nhiều mức khác nhau của  $T_f/\tau$  trong đó  $\tau$  được định nghĩa là tổng thời gian của tải trọng di động trên dầm từ điểm xuất phát bên trái đến vị trí cuối dầm về phía phải và ký hiệu  $T_f$  được xem như chu kỳ cơ bản của dầm.

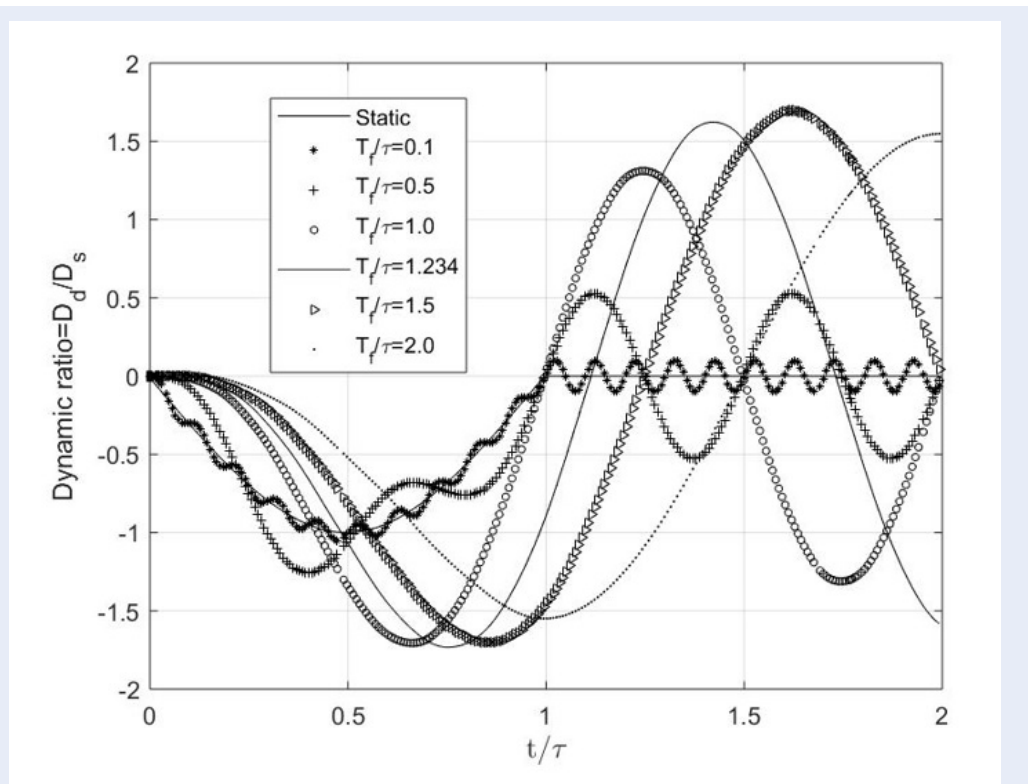
Nghiên cứu tiếp theo được thực hiện với tải trọng di động một trục mang khối lượng tương tác trên dầm Euler-Bernoulli. Hệ tải di động bao gồm khối lượng dao động  $m_1$ , với độ cứng  $k$  và cản nhớt  $c$  được thể hiện trên Hình 1. Các ma trận tương ứng với hệ thống tải trọng một trục được thiết lập phụ thuộc theo thời gian và thay đổi liên tục trong hệ ma trận toàn cục của xe và dầm khi tải trọng biến thiên. Hệ số động lực học đối với dầm ngàm hai đầu được trình bày trong Bảng 2 đã chỉ ra mức độ tương quan tốt giữa kết quả từ phương pháp B-Spline và các kết quả nghiên cứu <sup>13</sup> với sai số khá nhỏ.

### Kết cấu dầm cáp liên hợp chịu tác dụng của tải trọng một trục có xét khối lượng

Kết cấu phức tạp bao gồm dầm và cáp liên hợp 3 nhịp đối xứng được chỉ ra trên Hình 3 với đặc tính cơ học



Hình 1: Mô hình tải trọng di động một trục mang khối lượng trên dầm đàn hồi trên mặt gồ ghề (roughness surface)



Hình 2: Chuyển vị động của dầm do tải trọng tập trung (không mang khối lượng) đối với các tốc độ di chuyển khác nhau

**Bảng 2:** Bảng so sánh hệ số động của chuyển vị ở giữa nhịp dầm giản đơn chịu tải trọng mang khối lượng.

$T_f/\tau$	Lin et al. <sup>13</sup>	B-spline Method	Error (%)
0,1	1,028	1,0303	0,22
0,5	1,206	1,2182	1,01
1,0	1,533	1,5372	0,27
1,5	1,460	1,4589	-0,08
2,0	1,307	1,3062	-0,06

của từng cấu kiện được phân tích trong nghiên cứu này

Độ cứng tương ứng của cáp được mô tả bằng cách sử dụng các công thức đã nêu trong mục độ cứng đàn hồi của cáp và được đặt cách nhau 10 mét. Tải trọng xe di động trong nghiên cứu này được xem xét với mô hình hai bậc tự do. Thông số của tải trọng di động được giả định gần với thực tế thông qua tương tác giữa xe và cầu như sau:

$$m_2 = 3000 \text{ kg}, m_1 = 31700 \text{ kg}, P = 347 \text{ KN},$$

$$k_p = 14.10^6 \text{ N/m}, k_s = 8.10^6 \text{ N/m},$$

$$c_p = 8.10^4 \text{ N/m}.$$

Từ Bảng 3, các tần số dao động tự nhiên được xem xét là hoàn toàn trùng khớp với tần số được phân tích trên mô hình ABAQUS khi có xem xét và không xem xét ảnh hưởng của trọng lượng cáp. Các kết quả số được trình bày trong bảng này đơn thuần được sử dụng để so sánh, đánh giá độ tin cậy của phương pháp B-Spline và không xem xét trong các tính toán phản ứng động học của dầm-cáp liên hợp. Khối lượng và độ cứng giảm chấn được lựa chọn dựa trên tần số dao động cơ bản thứ nhất và thứ hai của cầu sao cho tỷ số giảm chấn nhất bằng  $\xi = 2\%$  đối với vật liệu bê tông và thép.

Để khảo sát ảnh hưởng của phương tiện di động trên kết cấu dầm cáp liên hợp, hai vấn đề chính bao gồm: (i) kết cấu áp đặt mô hình phương tiện là tải trọng tập trung di động (lý tưởng hóa của tải trọng tập trung không có khối lượng tiếp xúc), và (ii) kết cấu chịu tải trọng mang khối lượng chuyển động bao gồm (khối lượng thùng xe  $m_1$  và khối lượng bánh xe  $m_2$ ), được xem xét trong quá trình tính toán.

Bảng 4 và Bảng 5 trình bày kết quả tính toán của chuyển vị động và mômen động trên kết cấu dầm cáp liên hợp tại các vị trí cụ thể do tải trọng di động gây ra. Có thể nhận thấy rằng, sự khác biệt được thể hiện rõ khi có xét hoặc không xét khối lượng xe, điều này gây ra sự thay đổi tương đối lớn đối với chuyển vị động trong khoảng (-9,82, 9,15)% và khoảng (-5,36, 4,37)% đối với biên độ mô men tại các điểm tính toán.

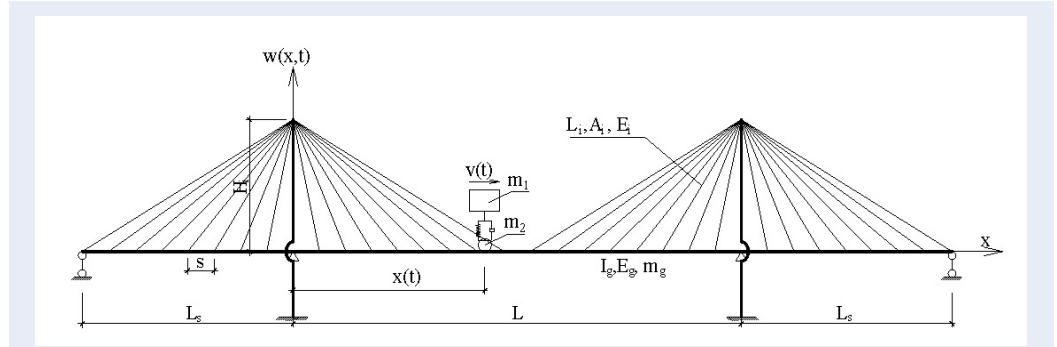
Có thể nhận thấy rằng khối lượng chuyển động có ảnh hưởng đáng kể đến phản ứng động trên mômen và chuyển vị khi xe tác động trực tiếp lên kết cấu dầm. Tác động cao nhất đối với chuyển vị động là 9,82% tại điểm cục bộ trong khi giá trị này đạt được ở mức 5,36% đối với mômen động. Lực quán tính ngày càng tăng do tải trọng mang khối lượng được xem xét trong suốt quá trình phân tích động lực học có thể gây ra phản ứng nghiêm trọng hơn trên dầm, tuy nhiên, vấn đề này đã phản ánh một cách hợp lý với kỳ vọng cũng như điều kiện thực tế.

Xem xét một cách chi tiết, khối lượng dao động của xe trong hệ thống tải trọng cũng đồng thời hấp thụ năng lượng do dao động nội tại, tải trọng tương tác động có thể tạo ra các kết quả số của mômen động và chuyển vị động tại một số điểm kết nối giữa cáp và dầm nhỏ hơn khi so sánh với kết quả thu được gây ra bởi tải trọng tập trung thẳng đứng và không xét khối lượng di động.

Phản ứng động của tải trọng di động được phân tích theo thời gian trên kết cấu dầm cáp liên hợp, được biểu diễn trên Hình 4 cho chuyển vị động thẳng đứng tại giữa nhịp dầm. Hình 5 và Hình 6 lần lượt biểu diễn mômen động theo thời gian tại tháp và giữa nhịp của kết cấu.

Phân tích các chuyển vị động và mômen uốn động theo thời gian khi xét ảnh hưởng của các tham số như tốc độ và độ cứng lò xo của tải trọng được trình bày trong Hình 7 và 8 và Hình 9. Đúng trên góc độ của các bài toán ứng dụng kỹ thuật, phản ứng động lớn nhất tại các điểm tính toán đã chứng minh rằng phương pháp xấp xỉ dựa trên hàm cơ sở B-Spline thể hiện biên độ dao động lớn và hợp lý do tải trọng động gây ra khi tính toán theo từng bước thời gian.

Hình 7 và Hình 8 cho thấy sự độ lớn của hệ số động DAF (DAFd: hệ số của chuyển vị và DAFm: hệ số động của momen) thay đổi khi vận tốc của xe biến thiên tương ứng với ba mômen quán tính  $I = 1.2, 5$  và  $10m^4$ . Các giá trị DAF được đề cập trong phân tích này tăng dần từ dải tốc độ 20-40 m/s, tương đương với 72-144 km/h.



**Hình 3:** Mô hình 2D cầu dây văng 3 nhịp  $L = 80\text{m} \times 170\text{m} \times 80\text{m}$ . Thông số cầu bao gồm: dây cáp:  $E_c = 1.8 \times 10^8 \text{ KN/m}^2$ , Diện tích  $A = 0.005 \text{ m}^2$ . Dầm và tháp lần lượt là:  $I_g = 1,2 \text{ m}^4$ ,  $E_g = 38.10^6 \text{ KN/m}^2$ ,  $I_p = 2\text{m}^4$ ,  $\gamma_c = 2.5 \text{ T/m}^3$ .

**Bảng 3:** Bảng so sánh tần số dao động tự nhiên của phương pháp B-Spline và Abaqus.

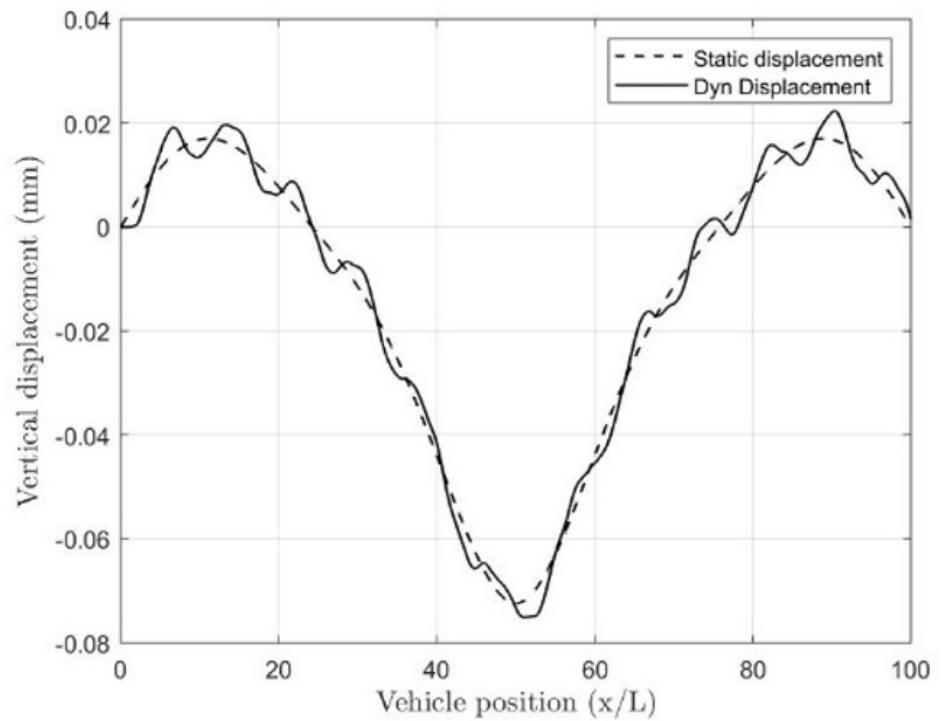
Mode dao động	B-Spline	ABAQUS	Mode dao động	B-Spline	ABAQUS
Chu kỳ T (s)					
1	0,8754	0,8754	7	0,15020	0,15020
2	0,4968	0,4969	8	0,13312	0,13312
3	0,3388	0,3388	9	0,12319	0,12319
4	0,2955	0,2955	10	0,11329	0,11329
5	0,21167	0,21167	11	0,09891	0,09891
6	0,1776	0,1776	12	0,09035	0,09035

**Bảng 4:** So sánh chuyển vị động có xét/ không xét tải trọng tương tác tại các vị trí liên kết giữa cáp và dầm

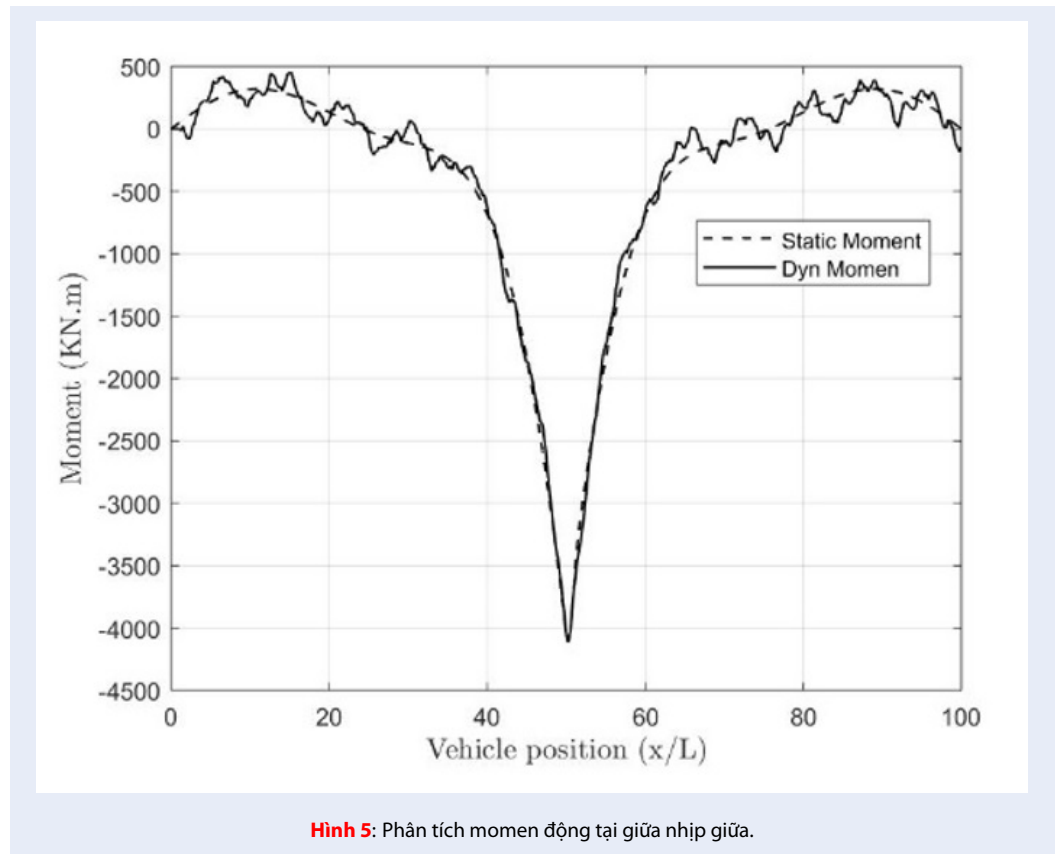
Vị trí	Không có khối lượng (KN.m)	Có khối lượng (KN.m)	Sai số (%)
20m	-0,02602	-0,02600	0,09
40m	-0,02933	-0,02876	2,01
60m	-0,01560	-0,01642	-4,99
100m	-0,01815	-0,01738	4,45
120m	-0,04340	-0,04169	4,09
140m	-0,06448	-0,06463	-0,24
165m	-0,07719	-0,07577	1,86
180m	-0,06860	-0,07309	-6,14
200m	-0,05620	-0,05149	9,15
220m	-0,02998	-0,02998	0,00
270m	-0,01575	-0,01571	0,26
290m	-0,02841	-0,03150	-9,82

**Bảng 5:** So sánh momen động khi có xét/ không xét tải trọng tương tác tại điểm liên kết giữa cáp và dầm

Vị trí	Không có khối lượng (KN.m)	Có khối lượng (KN.m)	Sai số (%)
20m	-3913,9	-3914	0,00
40m	-3371,1	-3250,4	3,71
60m	-1742,6	-1800,7	-3,23
100m	-1637,1	-1649,2	-0,73
120m	-2616,7	-2509,2	4,28
140m	-3798,3	-3639,3	4,37
165m	-4211,8	-4131,3	1,95
180m	-3921,3	-3896,8	0,63
200m	-3067	-3217,2	-4,67
220m	-1990,1	-2102,8	-5,36
270m	-1726,8	-1775	-2,72
290m	-3282,8	-3359,9	-2,29



**Hình 4:** Phân tích chuyển vị động tại giữa nhịp giữa.



Hình 5: Phân tích momen động tại giữa nhịp giữa.

Xét tại vị trí tháp cầu, biên độ mômen DAFm luôn đạt đến dải hệ số momen động cao nằm trong khoảng (1,25,1,95) đối với kết cấu nhịp lớn khi xét ảnh hưởng của tốc độ xe di chuyển. Do đó, theo phương pháp này, hệ số động lực đặc biệt xét theo momen uốn cần được đánh giá một cách chi tiết để tránh gây ra hư hỏng trên kết cấu nhịp lớn. Hệ số momen động theo quan điểm của tiêu chuẩn AASHTO được xem là thành phần quan trọng trong việc đánh giá khả năng chịu tải của dầm theo điều kiện sức kháng uốn của vật liệu.

Các so sánh được trình bày trên Hình 7 thể hiện các giá trị biên độ nhỏ của chuyển vị động  $DAF_d = 1,299, 1,156$  và  $1,129$  tại điểm chính giữa của nhịp cầu khi xem xét tương ứng với các độ cứng khác nhau của mômen quán tính trên dầm. Tuy nhiên, tại vị trí tháp, hệ số momen động với các giá trị đạt được cao hơn với  $DAF_m = 1,615, 1,736, 1,34$  tại  $x = 80m$ , chỉ số này được chứng minh rõ ràng trong Hình 8 khi tính toán dao động ở tốc độ tải trọng di động là  $30 m/s$ . Hệ số động lực tăng dần khi tốc độ của xe tăng dần.

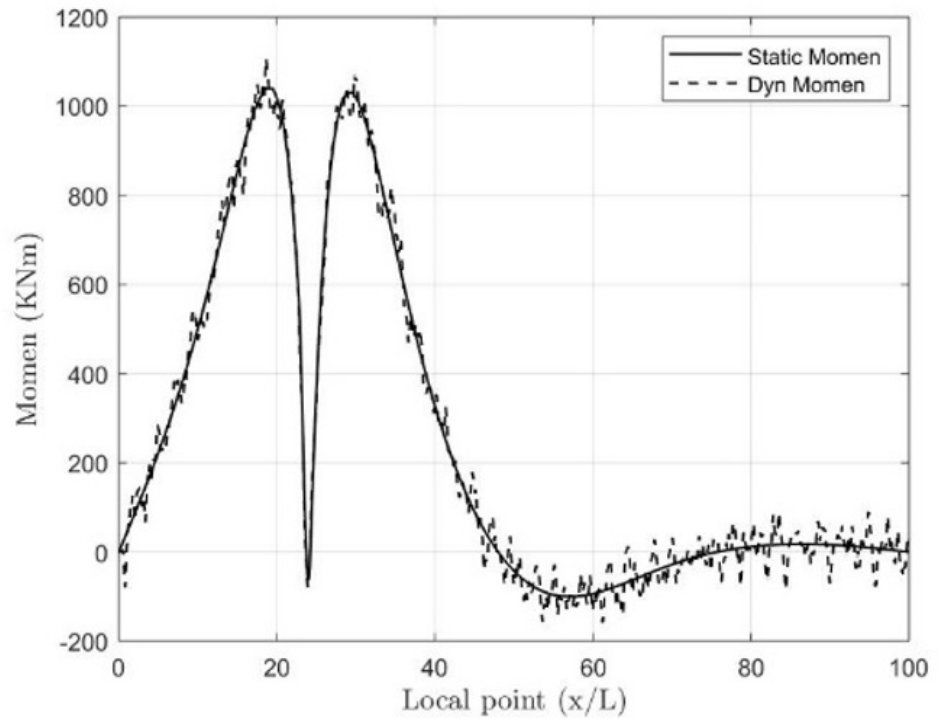
Cuối cùng, ảnh hưởng của độ cứng đàn hồi do tải trọng di động mang khối lượng dao động cũng được xem xét trong nghiên cứu này. Hệ số động của momen DAFm tại giữa nhịp dầm với các độ cứng đàn

hồi khác nhau được thể hiện trên Hình 9. Từ các kết quả tính toán, có thể thấy rằng các hệ số momen động DAFm tăng lên ở giá trị tới hạn khi độ cứng nhịp xe thay đổi từ  $k_s = 1.5 \times 10^6 N/m$  đến  $k_s = 2 \times 10^6 N/m$  tương ứng với hệ số động DAFm trong khoảng (1.5,1.65). Có thể nhận thấy rằng việc tăng độ cứng của nhịp xe làm tăng lực tương tác và gây ra tác nhân khuếch đại lớn hơn trên hệ số động lực (DAF). Nguyên nhân chính có thể được giải thích bởi hệ thống xe mang khối lượng bị tăng cứng hơn và khối lượng dao động dần thay đổi trở thành khối lượng không dao động trong điều kiện độ cứng nhịp xe  $k_s$  tăng cao. Do đó, độ cứng nhịp xe trong hệ thống tải trọng di động mang khối lượng có ảnh hưởng rõ ràng đến phản ứng động của kết cấu dầm cáp liên hợp và cũng phải được xem xét trong tính toán kỹ thuật.

Từ kết quả của Hình 9, có thể kết luận rằng hệ số momen động DAFm được xấp xỉ đến các giá trị lớn hơn tại hầu hết các vị trí của dầm gần tháp trong khi biên độ phản ứng động tương đối nhỏ tại vị trí giữa nhịp dầm.

Hiện tượng tạo ra các giá trị hệ số động DAF lớn tại các vị trí kết nối giữa dầm và tháp được giải thích bởi tần số dao động riêng của tải trọng di động xấp xỉ gần với tần số dao động tự nhiên của hệ kết cấu dầm cáp





Hình 6: Phân tích momen động tại tháp cầu

liên hợp gây nên hiện tượng cộng hưởng khi các tần số này xấp xỉ gần nhau.

### KẾT LUẬN

Phản ứng động lực học của lý thuyết Euler-Bernoulli sử dụng trên dầm cho nhiều trường hợp khác nhau từ dầm đơn giản đến kết cấu nhịp lớn chịu tác dụng của tải trọng di động được phát triển thành công trên cơ sở của hàm xấp xỉ mới B-Spline, nghiên cứu có thể được kết luận thông qua một số nội dung sau:

Các kết quả so sánh từ công thức của lời giải giải tích và phần tử hữu hạn thực hiện trên ABAQUS đã chứng minh rằng phương pháp xấp xỉ mới sử dụng hàm cơ sở B-Spline có thể được xem như công cụ hiệu quả trong việc phân tích ứng xử động của kết cấu nhịp lớn do tải trọng di động mang khối lượng.

Phương pháp xấp xỉ mới kết hợp với hàm bậc ba B-Spline có thể rút ngắn đáng kể thời gian với chi phí tính toán hiệu quả. Lời giải số luôn ổn định bởi việc sử dụng một biến trên nút thay cho nhiều biến tính toán (chuyển vị thẳng đứng và góc xoay) bằng kỹ thuật góc xoay tự do trong phân tích bậc cao.

Khối lượng quán tính phi tuyến khi xem xét phản ứng động của kết cấu được tính toán thay đổi theo từng bước thời gian cụ thể, từ đó có thể có thể xây dựng

các biện pháp đảm bảo gia cường cho kết cấu an toàn và hiệu quả.

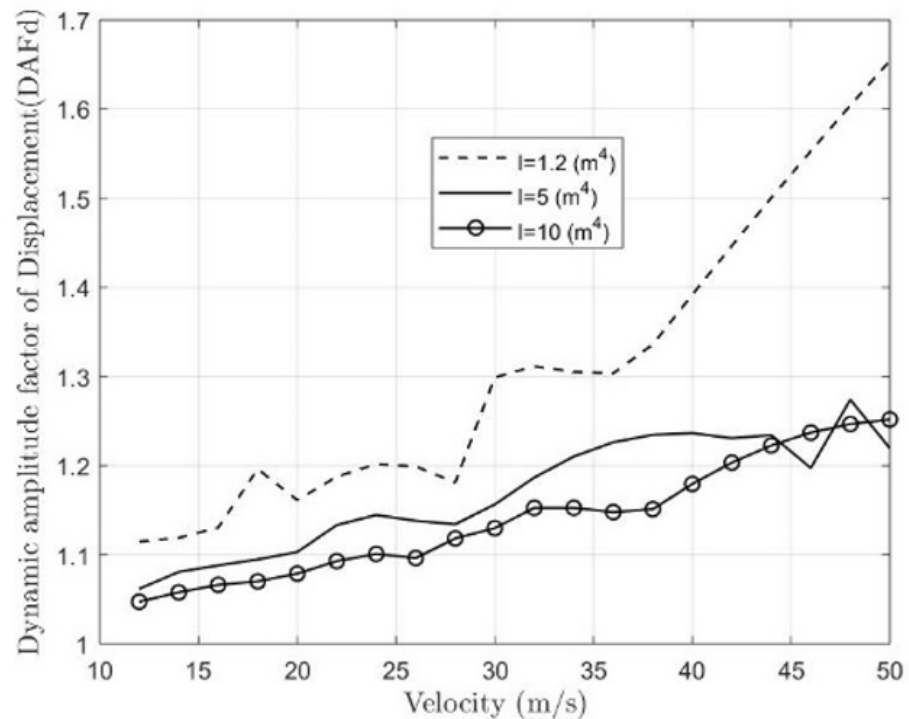
Khối lượng cáp và bề mặt gỗ ghè của kết cấu nhịp lớn chưa được xem xét trong nghiên cứu này, đây là các hướng nghiên cứu cụ thể sẽ được xem xét trong tương lai.

### LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 107.02-2018.28

### DANH MỤC TỪ VIẾT TẮT

- FEM: finite element method
- Dyn Momen: Momen Động
- Static Momen: Momen tĩnh
- Dyn Displacement: Chuyển vị động
- DAFd: hệ số của chuyển vị
- DAFm: hệ số động của momen
- Static Displacement: Chuyển vị tĩnh
- Static: tĩnh
- Roughness Surface: Bề mặt gỗ ghè
- knot span: đoạn knot



**Hình 7:** Ảnh hưởng của tốc độ xe chạy đối với hệ số động trên chuyển vị tại vị trí giữa nhịp cầu thông qua các giá trị khác nhau của mô men quán tính

## XUNG ĐỘNG LỢI ÍCH TÁC GIẢ

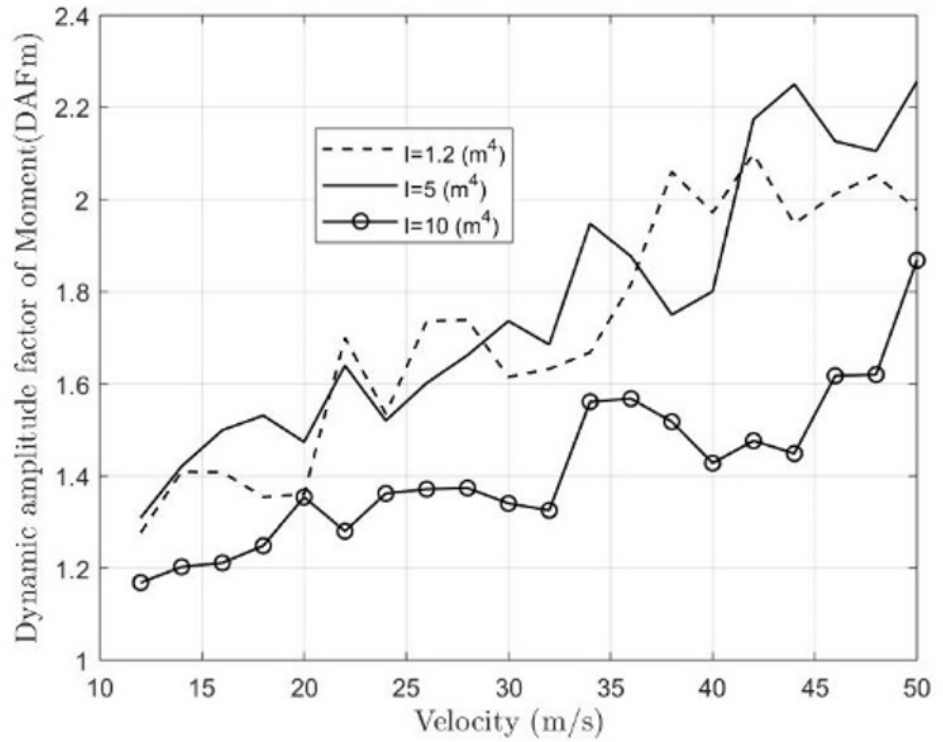
Các tác giả tuyên bố rằng họ không có xung đột lợi ích

## ĐÓNG GÓP CỦA CÁC TÁC GIẢ

Đỗ Nguyễn Văn Vương, Võ Đức Cẩm Hải, Lê Tuấn Phương Nam phân tích mô hình số, lý thuyết toán, phân tích kết quả, thu thập số liệu, xử lý kết quả và tham gia viết bài.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

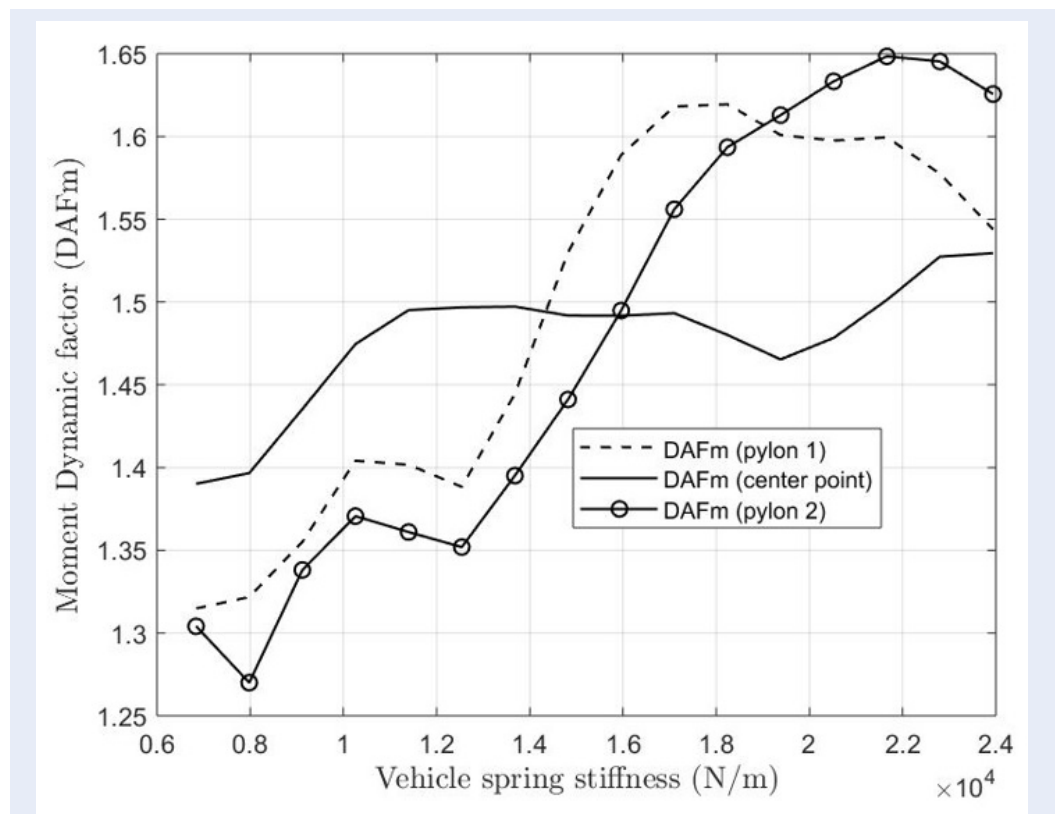
- Savin E. Dynamic amplification factor and response spectrum for the evaluation of vibration of beams under successive moving loads. *Journal of Sound and Vibration*. 2001;248(2):267–288. Available from: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3787>.
- Michaltsos GT. Dynamic behavior of a single-span beam subjected to loads moving with variable speeds. *Journal of Sound and Vibration*. 2002;258(2):359–372. Available from: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5141>.
- Simsek M, Kocaturk T. Nonlinear dynamic analysis of an eccentrically prestressed damped beam under a concentrated moving harmonic load. *Journal of Sound and Vibration*. 2009;320:235–253. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.07.012>.
- Seong-Min K. Vibration and stability of axial loaded beams on elastic foundation under moving harmonic loads. *Engineering Structures*. 2004;29(9):95–105. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2003.09.001>.
- Wang RT, Chou TH. Non-linear vibration of Timoshenko beam due to a moving force and the weight of the beam. *Journal of Sound and Vibration*. 1998;218(1):117–131. Available from: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.1827>.
- Cho T, Song MK. Structural reliability of a suspension bridge affected by environmentally assisted cracking. *KSCSE Journal of Civil Engineering*. 2006;10(1):21–31. Available from: <https://doi.org/10.1007/BF02829301>.
- Abu-Hilal M. Vibration of beams with general boundary conditions due to a moving random load. *Archive of Applied Mechanics*. 2003;72:637–650. Available from: <https://doi.org/10.1007/s00419-002-0228-7>.
- Kiendl J, Auricchio F, Hughes TJR, Reali A. Single-variable formulations and isogeometric discretizations for shear deformable beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2015;284:988–1004. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.11.011>.
- Borkovića A, Kovačević S, Radenković G, Milovanović S, Majstorović D. Rotation-free isogeometric dynamic analysis of an arbitrarily curved plane Bernoulli-Euler beam. *Enging structures*. 2019;181:192–215. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.12.003>.
- Elguedj T, Bazilevs Y, Calo VM, Hughes TJR. B-and F-projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2008;197:2732–2762. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.01.012>.
- Bruno D, Colotti V. Vibration Analysis of Cable-Stayed Bridges. *Struct Eng Int*. 1994;4(1):23–28. Available from: <https://doi.org/10.2749/101686694780602187>.



Hình 8: Ảnh hưởng của tốc độ xe chạy đối với hệ số động của momen khi Momen quán tính dầm,  $I=1.2, 5, 10 (m^4)$ .

- Warburton GB. The dynamic behavior of structures. Oxford: Pergamon Press. 1976;
- Lin YH, Trethewey MW. Finite element analysis of elastic beams subjected to moving dynamic loads. Journal of Sound

and Vibration. 1990;136:323–342. Available from: [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(90\)90860-3](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90860-3).



Hình 9: Ảnh hưởng của độ cứng nhíp xe trên hệ số động của momen tại tháp cầu.

# A B-Spline approach on Dynamic response of bridges subjected to moving vehicles

Vuong Nguyen Van Do<sup>1,\*</sup>, Hai Vo Duc Cam<sup>2,3</sup>, Nam Le Tuan Phuong<sup>1</sup>



Use your smartphone to scan this QR code and download this article

## ABSTRACT

Dynamic analysis of various structures subjected to moving vehicles using the Euler-Bernoulli formulation is presented in this paper. The method employs a new numerical approach in which the B-Spline basis functions are suggested for the computational implementation. The D'Alembert's principle is used to set up the moving differential equation system acting on vehicle and beam solving by the Newmark's modified average acceleration. The rotation-free technique has been taken account into the general formulation on Euler Euler-Bernoulli beam theory by using only one vertical deflection unknown and ignoring the rotational variable considering for each control point. The validations of the proposed method considered by a complicated moving vehicle are compared to the precisely analytical results. With the most existing methods of finite element method (FEM) and readily exact solutions, the present technique indicated that it could be an effective method in suitably simulating the interaction of the bridge structures and complicated vehicles. Through the obtained numerical results, this study gives recommendations and proper measures to minimize the impact of vehicle on long span structures and significantly reduce the computational time and cost when analyzing and assess to these practical structures.

**Key words:** Euler-Bernoulli formulation, Dynamic response, Moving vehicles system, B-Spline cubic function, Long span structures, Rotation free technique

<sup>1</sup>Applied Computational Civil and Structural Engineering Research Group, Faculty of Civil Engineering, Ton Duc Thang University, Ho Chi Minh City, Vietnam

<sup>2</sup>Vietnam National University, Ho Chi Minh City, Vietnam

<sup>3</sup>Faculty of Mathematics Computer Science, University of Science, VNU-HCMC, Nguyen Van Cu Street, District 5, Ho Chi Minh City, Vietnam

## Correspondence

**Vuong Nguyen Van Do**, Applied Computational Civil and Structural Engineering Research Group, Faculty of Civil Engineering, Ton Duc Thang University, Ho Chi Minh City, Vietnam  
Email: dovanvuong28584@gmail.com

## History

- Received: 17-9-2020
- Accepted: 19-11-2020
- Published: 04-12-2020

DOI : 10.32508/stdjns.v4i4.956



Cite this article : Do V N V, Cam H V D, Phuong N L T. **A B-Spline approach on Dynamic response of bridges subjected to moving vehicles.** *Sci. Tech. Dev. J. - Nat. Sci.*; 4(4):888-900.