

Phương pháp phổ để giải số phương trình Boltzmann cho các chất khí có độ nhớt

Đình Phan Cao Nguyễn

Tóm tắt—Chúng tôi đề xuất trong bài báo này một phương pháp giải tích số cho phương trình Boltzmann cho các chất khí có ma sát giữa các phân tử. Đây là phương pháp số đầu tiên cho phương trình Boltzmann có độ nhớt. Chúng tôi biểu diễn giá trị hàm mật độ của chất khí và so sánh các kết quả trong các trường hợp có ma sát giữa các phân tử và trường hợp không có ma sát. Giá trị hàm mật độ của các chất khí có ma sát giữa các phân tử khi va chạm sẽ giảm dần về 0. Giá trị của ma sát càng lớn thì tốc độ giảm giá trị của hàm mật độ của chất khí về 0 càng nhanh.

Từ khóa—phương trình Boltzmann, giải tích số, phương pháp phổ, ma sát phân tử, hàm mật độ

1 GIỚI THIỆU

Phương trình Boltzmann mô tả chuyển động của các phân tử của một chất khí trong đó sự tương tác của các phân tử là va chạm đàn hồi nhị phân (xem [1-16]).

Cho $x, v \in \mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f),$$

với $f(t, x, v)$ là hàm mật độ của chất khí phụ thuộc vào thời gian và vận tốc. Trong Boltzmann, toán tử va chạm Q là một toán tử bậc 2 của $f(t, x)$. Thời gian t và vị trí x được xem là các tham số của Q và vì vậy sẽ bị bỏ qua trong biểu diễn dưới đây

$$Q(f, f)(v) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} B(|v - v_*|, \cos\theta)(f'_1 f'_2 - f_1 f_2) dv_* d\sigma, \quad (1.1)$$

với $f = f(v)$, $f_* = f(v_*)$, $f'_1 = f(v'_1)$, $f'_2 = f(v'_2)$.

Vận tốc của va chạm là các cặp (v, v_*) và (v', v'_*) có liên quan bởi

$$v' = \frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|}{2} \sigma, v'_* = \frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|}{2} \sigma.$$

Trong đó σ thuộc \mathbb{S}^{d-1} .

Hạt nhân B của va chạm là một hàm số không âm bởi các đối số vật lý bất biến và chỉ phụ thuộc vào $|v - v_*|$ và $\cos \theta = \hat{g} \cdot \sigma$ (với $\hat{g} = \frac{v-v_*}{|v-v_*|}$).

Việc xây dựng các phương pháp tính cho phương trình Boltzmann có tầm quan trọng trong nhiều ứng dụng, từ động lực học khí hiếm (RGD) [27], vật lý plasma [28], dòng chảy dạng hạt [17, 18], chất bán dẫn [32], và lý thuyết động lượng tử [29].

Khó khăn trong việc xây dựng một phương pháp giải số cho phương trình Boltzmann là do cấu trúc đa chiều của toán tử Q , trong tích phân được tính trên miền 5 chiều. Vì vậy, phương pháp thông thường là kỹ thuật xác suất Monte Carlo của Bird [19] và Nanbu [33], đây là một phương pháp lấy mẫu ngẫu nhiên có độ chính xác bậc 1 và thuộc lớp thuật toán không tắt định. Tuy nhiên, các phương pháp này có độ chính xác rất thấp.

Ngày nhận: 24-08-2018, ngày chấp nhận đăng: 09-11-2018; Ngày đăng: 31-12-2018

Đình Phan Cao Nguyễn – Trường Đại học Nha Trang

*Email: nguyendpc@ntu.edu.vn

Gần đây, một lớp phương pháp mới dựa trên việc sử dụng các kỹ thuật quang phổ trong không gian vận tốc đã được xây dựng. Phương pháp này có độ chính xác phổ [30, 35] và thuộc lớp thuật toán tắt định. Phương pháp này lần đầu tiên được phát triển cho các phương trình động học trong [34], dựa trên các phương pháp quang phổ trong cơ học chất lỏng [24] và việc sử dụng các công cụ biến đổi Fourier trong phân tích phương trình Boltzmann [21]. Nó dựa trên phương pháp xấp xỉ Fourier – Galerkin của phương trình. Các khái quát về phương pháp và độ chính xác quang phổ đã được đưa ra trong [26, 35, 36].

Trong bài báo này, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp phổ để giải số phương trình Boltzmann trong các chất khí có độ nhớt/ma sát. Phương trình này có dạng

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f) + \varepsilon f,$$

trong đó ε là hệ số nhớt.

Bài báo này là kết quả giải tích số đầu tiên cho phương trình Boltzmann trong các chất khí có độ nhớt/ma sát.

2 PHƯƠNG PHÁP

Biểu diễn Carleman của toán tử va chạm Q

Trong phần này, chúng ta sẽ ước chừng toán tử va chạm bắt đầu từ một biểu diễn mà bằng cách nào đó bảo toàn nhiều đối xứng của toán tử va chạm khi nó cắt bỏ nó trong một miền bị chặn. Biểu diễn này được sử dụng trong [20, 22, 23, 31], và nó gần với đại diện Carleman cổ điển (xem [25]).

Toán tử va chạm Boltzmann trong các miền bị chặn

Với mọi hàm liên tục $F(x)$, công thức cơ bản chúng ta cần là

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} F(|u|\sigma - u) d\sigma = \frac{1}{|u|^{d-2}} \int_{\mathbb{R}^d} \delta(2xu + |x|^2) F(x) dx, \quad (2.1)$$

và có thể được xác minh bằng cách hoàn thành hình vuông trong hàm delta Dirac, lấy tọa độ hình cầu $x = r\sigma$ và thực hiện thay đổi biến $r^2 = s$.

Xét vùng bị chặn $D_T = [-T, T]^d$ ($0 < T < +\infty$). Quy ước cách viết

$$\tilde{B}(x, y) = 2^{d-1} B(|x + y|, -\frac{x \cdot (x+y)}{|x||x+y|}) |x + y|^{-(d-2)}.$$

Ta có thể dễ dàng thấy rằng trên siêu phẳng biểu diễn bởi $x \cdot y = 0$, một công thức đơn giản hơn (sử dụng các phần tử của hạt nhân va chạm) là (xem [35])

$$\tilde{B}(x, y) = \tilde{B}(|x|, |y|) = 2^d B(\sqrt{|x|^2 + |y|^2}, \frac{|x|}{\sqrt{|x|^2 + |y|^2}}) (|x|^2 + |y|^2)^{-\frac{d-2}{2}}, \quad (2.2)$$

với $\delta(x \cdot y)$ là hàm Dirac ứng với $x \cdot y = 0$, ta biểu diễn toán tử lại như sau, cho $v \in D_T$

$$Q^{tr}(f, f)(v) = \int \int_{\{x, y \in \mathbb{R}^d | v+x, v+y, v+x+y \in D_T\}} \tilde{B}(x, y) \delta(x \cdot y) [f(v+y)f(v+x) - f(v+x+y)f(v)] dx dy.$$

Ta có thể dễ dàng kiểm tra xem biểu mẫu yếu sau có thỏa mãn với toán tử này hay không và điều này dẫn tới các định luật bảo toàn khối lượng, động lượng và năng lượng cũng như định lý entropy Boltzmann H

$$\int Q^{tr}(f, f) \varphi(v) dv = \frac{1}{4} \int \int \int_{\{v, x, y \in \mathbb{R}^d | v, v+x, v+y, v+x+y \in D_T\}} \tilde{B}(x, y) \delta(x \cdot y) f(v+x+y) f(v) [\varphi(v+y) + \varphi(v+x) - \varphi(v+x+y) - \varphi(v)] dv dx dy. \quad (2.3)$$

Đối với một hàm f với giá trong B_R , chúng tôi lấy $T = 2R$ để có được tất cả các va chạm có thể xảy ra. Trong thực tế ta có thể lấy $T \geq (1 + 3\sqrt{2})R/2$ nhằm ngăn chặn sự giao nhau giữa các miền mà hàm f khác 0 (xem [35]).

Toán tử trở thành

$$Q^R(f, f)(v) = \int_{x \in B_R} \int_{y \in B_R} \tilde{B}(x, y) \delta(x \cdot y) [f(v + y)f(v + x) - f(v + x + y)f(v)] dx dy, \quad (2.4)$$

với $v \in D_T$ (biểu thức cho $v \in \mathbb{R}^d$ được tính theo chu kỳ).

Bằng phép đổi biến v (bởi x, y và $x + y$), sử dụng các thay đổi $x \leftrightarrow -x$ và $y \leftrightarrow -y$, và thực tế

$$\tilde{B}(-x, y) \delta(-x \cdot y) = \tilde{B}(x, y) \delta(x \cdot y) = \tilde{B}(x, -y) \delta(x \cdot -y).$$

Ta có thể dễ dàng chứng minh rằng đối với bất kỳ hàm tuần hoàn φ trên D_T theo biểu diễn nghiệm yếu chấp nhận được (bài báo [30] trình bày chi tiết các bước để đạt được công thức cổ điển này)

$$\int_{D_T} Q^R(f, f) \varphi(v) dv = \frac{1}{4} \int_{v \in D_T} \int_{x \in D_T} \int_{y \in D_T} \tilde{B}(x, y) \delta(x \cdot y) f(v + x + y) f(v) [\varphi(v + y) + \varphi(v + x) - \varphi(v + x + y) - \varphi(v)] dv dx dy. \quad (2.5)$$

Thuật giải bằng phương pháp phổ

Trong phần này chúng tôi sử dụng Q^R xây thuật giải bằng phương pháp phổ. Các phương pháp phổ cho các phương trình động học bắt nguồn từ [34] và [35], và được phát triển hơn nữa trong [36] và [30]. Trước khi họ có một lịch sử lâu dài trong cơ học chất lỏng; xem [24].

Đơn giản hóa ký hiệu, lấy $T = \pi$. Giá trị xấp xỉ của hàm f_N được biểu diễn bởi dưới dạng biểu diễn Fourier

$$\begin{cases} f_N(v) = \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e^{ikv}, \\ \hat{f}_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{D_\pi} f(v) e^{-ikv} dv. \end{cases}$$

Phương trình phổ là phép chiếu của phương trình va chạm trong \mathbb{P}^N , với \mathbb{P}^N là không gian vectơ $(2N + 1)^d$ chiều của các đa thức lượng giác có bậc tối đa N theo từng hướng, tức là

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} = P_N Q^R(f_N, f_N),$$

với P_N biểu thị phép chiếu trực giao trên \mathbb{P}^N trong $L^2(D_\pi)$. Một tính toán đơn giản dẫn đến tập hợp các phương trình vi phân thông thường sau đây:

Hệ số Fourier

$$\hat{f}'_k(t) = \sum_{\substack{l, m=-N \\ l+m=k}}^N \hat{\beta}(l, m) \hat{f}_l \hat{f}_m, \quad k = -N, \dots, N. \quad (2.6)$$

$\hat{\beta}(l, m)$ được gọi là kernel modes, xác định bởi

$$\hat{\beta}(l, m) = \int_{x \in B_R} \int_{y \in B_R} \tilde{B}(x, y) \delta(x \cdot y) [e^{ilx} e^{imy} - e^{im(x+y)}] dx dy.$$

Do đó, sau này trong bài báo này ta sẽ tập trung vào β , và dễ dàng kiểm tra rằng $\beta(l, m)$ chỉ phụ thuộc vào $|l|, |m|$, và $|l \cdot m|$. Trong đó l, m là các hệ số trong công thức

$$f_N(v) = \sum_{l=-N}^N \hat{f}_l e^{ilx} = \sum_{m=-N}^N \hat{f}_m e^{imy}.$$

Lưu ý rằng cách thông thường để cắt ngắn toán tử va chạm Boltzmann cho hàm tuần hoàn bắt đầu từ biểu diễn (xem [34]) với $u = |v - v_*|$

$$Q(f, f) = \int_{u \in \mathbb{R}^d} \int_{\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}} B(|u|, \cos \theta) [f(v - (u - |u|\sigma)/2) f(v - (u + |u|\sigma)/2) - f(v) f(v - u)] d\sigma du. \quad (2.9)$$

Sau đó rút gọn biến $u = x + y$ sao cho $u \in B_R$. Chúng ta có

$$Q_{usual}^R(f, f)(v) = \int_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{x \in \mathbb{R}^d} \tilde{B}(x, y) \delta(x \cdot y) \chi_{\{|x+y| \leq R\}} [f(v + y) f(v + x) - f(v + x + y) f(v)] dx dy,$$

với $\chi_{\{|x+y|\leq R\}}$ là hàm đặc trưng của tập $\{|x+y|\leq R\}$ hay $\{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+\dots+(x_d+y_d)^2\leq R^2\}$.

Cuối cùng, chúng ta có (xem [35])

$$\hat{\beta}_{usual}(l, m) = \int_{u \in B_R} \int_{\sigma \in S^{d-1}} B(|u|, \cos \theta) [e^{-i\frac{u(l+m)+|u|\sigma(m-l)}{2}} - e^{-i(um)}] d\sigma du.$$

Biểu diễn theo x và y

$$\hat{\beta}_{usual}(l, m) = \int_{x \in B_R} \int_{y \in B_R} \tilde{B}(x, y) \delta(x, y) \tilde{B}(x, y) \delta(x, y) \chi_{\{|x+y|\leq R\}} [e^{ilx} e^{imy} - e^{im(x+y)}] dx dy.$$

Vì vậy, các biểu diễn thông thường chứa nhiều khớp nối giữa x và y và nó ít thích hợp hơn cho việc xây dựng các thuật toán nhanh.

Thuật toán quang phổ nhanh

Ở đây chúng ta sẽ xấp xỉ mỗi $\hat{\beta}(l, m)$ bởi tổng của

$$\hat{\beta}(l, m) \cong \sum_{p=1}^A \alpha_p(l) \alpha'_p(m).$$

Chúng ta viết x và y trong tọa độ hình cầu

$$Q^R(f, f)(v) = \frac{1}{4} \int_{e \in S^{d-1}} \int_{e' \in S^{d-1}} \delta(e, e') de de' \left\{ \int_{-R}^R \int_{-R}^R p^{d-2} (p')^{d-2} \tilde{B}(p, p') [f(v+p'e')f(v+pe) - f(v+pe+p'e')f(v)] dp dp' \right\}. \quad (3.1)$$

Lấy A là tập hợp các cặp trục giao của các vectors đơn vị (e, e') , $(e, e') \in A$ nên $(-e, e')$, $(e, -e')$, $(-e, -e')$ cũng thuộc A (thuộc tính của tập A yêu cầu bảo toàn các luật bảo toàn của toán tử). Bây giờ chúng tôi định nghĩa

$$Q^{R,A}(f, f)(v) = \frac{1}{4} \int_{(e, e') \in A} \left\{ \int_{-R}^R \int_{-R}^R p^{d-2} (p')^{d-2} \tilde{B}(p, p') [f(v+p'e')f(v+pe) - f(v+pe+p'e')f(v)] dp dp' \right\} dA,$$

với dA là ký hiệu độ đo trên A và dĩ nhiên

$$dA(e, e') = dA(-e, e') = dA(e, -e') = dA(-e, -e').$$

Thay giá trị các biến trong v bằng $pe, p'e', pe+p'e'$ và các đối xứng của tập A , người ta có thể dễ dàng lấy được các dạng yếu dưới đây trên $Q^{R,A}$. Với các hàm chu kỳ φ trên D_T ,

$$\int_{D_T} Q^{R,A}(f, f) \varphi(v) dv = \frac{1}{16} \int_{v \in D_T} \int_{(e, e') \in A} \int_{-R}^R \int_{-R}^R p^{d-2} (p')^{d-2} \tilde{B}(p, p') f(v+pe+p'e') [\varphi(v+p'e') + \varphi(v+pe) - \varphi(v+pe+p'e') - \varphi(v)] dp dp' dA dv.$$

Điều này ngay lập tức mang lại các tính chất bảo tồn giống Q^R .

Tính toán các $\tilde{B}(x, y)$

Giả sử $\tilde{B}(x, y)$ là tích của hai hàm xác định a và b

$$\tilde{B}(x, y) = a(|x|)b(|y|).$$

Giả định này chắc chắn chấp nhận được nếu \tilde{B} là hằng số. Đây là một trường hợp phân tử Maxwellian trong không gian 2 chiều và quả cầu không gian 3 chiều (hạt nhân thích hợp nhất cho các ứng dụng).

Đầu tiên chúng ta hãy xử lý trên không gian 2 chiều với $\tilde{B} = 1$ để giải thích phương pháp. Với x và y là các tọa độ của hình cầu, e và e' là các vectơ đơn vị tương ứng thỏa mãn $x = pe$ và $y = p'e'$ sao cho

$$\beta(l, m) = \frac{1}{4} \int_{e \in S^1} \int_{e' \in S^1} \delta(e, e') \left[\int_{-R}^R e^{ip(l \cdot e)} dp \right] \left[\int_{-R}^R e^{ip'(m \cdot e')} dp' \right] de de'.$$

Chúng tôi biểu diễn

$$\phi_R^2(s) = \int_{-R}^R e^{ips} dp,$$

với $s \in R$.

Do đó chúng tôi có

$$\beta(l, m) = \int_0^\pi \phi_R^2(l, e_\theta) \phi_R^2\left(m, e_{\theta+\frac{\pi}{2}}\right) d\theta.$$

Hàm $\theta \rightarrow \phi_R^2(l, e_\theta) \phi_R^2\left(m, e_{\theta+\frac{\pi}{2}}\right)$ là hàm tuần hoàn trên $[0, \pi]$ và M là một số bất kỳ, ta xấp xỉ

$$\beta(l, m) = \frac{\pi}{M} \sum_{p=0}^{M-1} \alpha_p(l) \alpha'_p(m),$$

với $\alpha_p(l) = \phi_R^2(l, e_{\theta_p})$, $\alpha'_p(m) = \phi_R^2\left(m, e_{\theta_p+\frac{\pi}{2}}\right)$, và $\theta_p = \pi p/M$.

Nói chung theo giả định tách (3.2) trên \tilde{B} , chúng tôi thu được công thức tách biến

$$\beta(l, m) = \frac{\pi}{M} \sum_{p=0}^{M-1} \alpha_p(l) \alpha'_p(m)$$

với

$$\alpha_p(l) = \phi_R^2(l, e_{\theta_p}), \alpha'_p(m) = \phi_R^2\left(m, e_{\theta_p+\frac{\pi}{2}}\right)$$

và

$$\phi_{R,a}^2(s) = \int_{-R}^R a(p) e^{ips} dp, \phi_{R,b}^2(s) = \int_{-R}^R b(e') e^{ip's} dp' \text{ với } \theta_p = \pi p/M$$

3 KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Kiểm tra số

Với $t = q\Delta t$, $\Delta t > 0$ ta có

$$\hat{f}_K(q\Delta t) = \sum_{l,m=-N}^{l+m=k} \hat{\beta}(l, m) \hat{f}_l(q\Delta t) \hat{f}_m(q\Delta t).$$

Tính xấp xỉ

$$\hat{f}_K(q\Delta t) = \frac{\hat{f}_K((q+1)\Delta t) - \hat{f}_K(q\Delta t)}{\Delta t}.$$

Do đó

$$\hat{f}_K((q+1)\Delta t) = \hat{f}_K(q\Delta t) + \Delta t \sum_{l,m=-N}^{l+m=k} \hat{\beta}(l, m) \hat{f}_l(q\Delta t) \hat{f}_m(q\Delta t). \quad (4.1)$$

Đối với các chất khí có độ nhớt/ma sát ta có

$$\hat{f}_K((q+1)\Delta t) = \hat{f}_K(q\Delta t) + \Delta t \sum_{l,m=-N}^{l+m=k} \hat{\beta}(l, m) \hat{f}_l(q\Delta t) \hat{f}_m(q\Delta t) - \varepsilon \hat{f}_K(q\Delta t). \quad (4.2)$$

Trong không gian hai chiều $d = 2$, chúng tôi sử dụng $N = 5$, $M = 1$, $t \in [0, 0.5]$, $v \in [-\pi, \pi]$, $a = b = 1$, $R = \pi$, và

$$f(0, v) = \frac{v^2}{\pi\sigma^2} e^{(-v^2/\sigma^2)}, (*)$$

với $\sigma = \frac{\pi}{6}$, $D_\pi \in [-\pi, \pi]^2$, thay (*) vào (4.2)

- Tại thời điểm $q = 0$

$$\hat{f}_K(0, v) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{D_\pi} \frac{v^2}{\pi\sigma^2} e^{(-v^2/\sigma^2)} e^{-ikv} dv = \frac{9}{\pi^5} \int_{D_\pi} v^2 e^{\left(\frac{-36v^2}{\pi^2}\right)} e^{-ikv} dv,$$

- Tại thời điểm $q = 1$ ta có

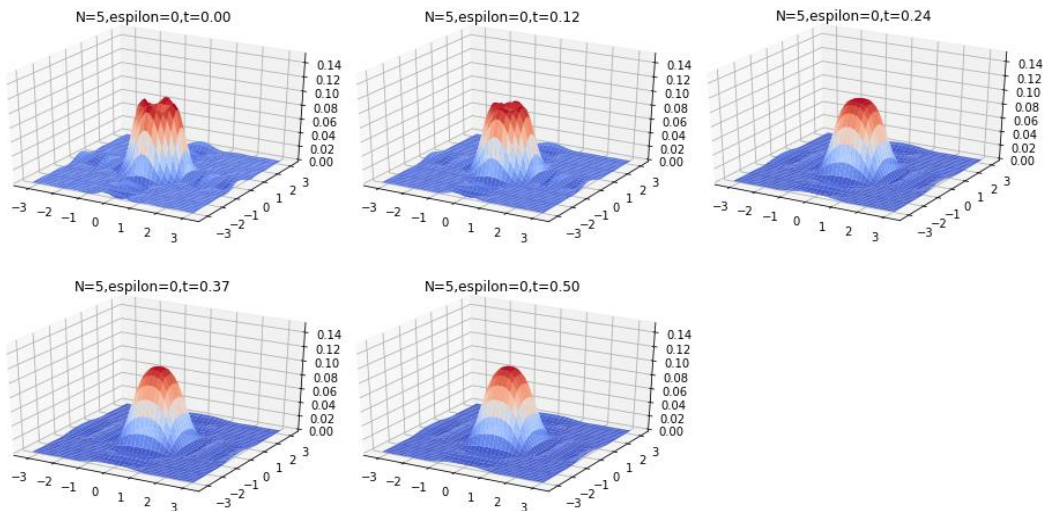
$$\hat{f}_k(\Delta t, v) = \hat{f}_k(0, v) - \varepsilon \Delta t \hat{f}_k(0, v) + \Delta t \sum_{l,m=-N}^N \hat{\beta}(l, m) \hat{f}_l(0) \hat{f}_m(0) = \frac{9}{\pi^5} \int_{D_\pi} v^2 e^{\left(\frac{-36v^2}{\pi^2}\right)} e^{-ikv} dv - \varepsilon \Delta t \frac{9}{\pi^5} \int_{D_\pi} v^2 e^{\left(\frac{-36v^2}{\pi^2}\right)} e^{-ikv} dv + \Delta t \sum_{l,m=-N}^N \hat{\beta}(l, m) \frac{81}{\pi^{10}} \int_{D_\pi} v^2 e^{\left(\frac{-36v^2}{\pi^2}\right)} e^{-ilv} \cdot v^2 e^{\left(\frac{-36v^2}{\pi^2}\right)} e^{-imv} dv,$$

Trong đó

$$\hat{\beta}(l, m) = \pi \sum_{p=0}^0 2\pi \text{Sinc}(\pi(l \cdot e_\theta)) 2\pi \text{Sinc}(\pi(m \cdot e_{\theta+\frac{\pi}{2}})) + \pi \sum_{p=0}^0 2\pi \text{Sinc}(\pi(m \cdot e_\theta)) 2\pi \text{Sinc}(\pi(m \cdot e_{\theta+\frac{\pi}{2}}))$$

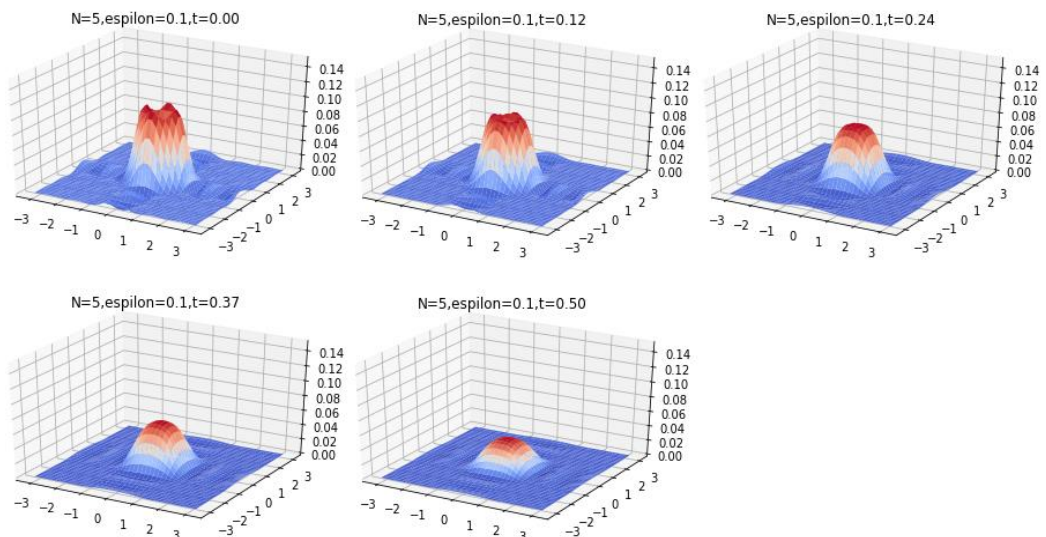
Các kết quả kiểm tra số

Chúng tôi tiến hành thử nghiệm với các giá trị lần lượt của ε là 0; 0,1; 0,2 và thu được các kết quả



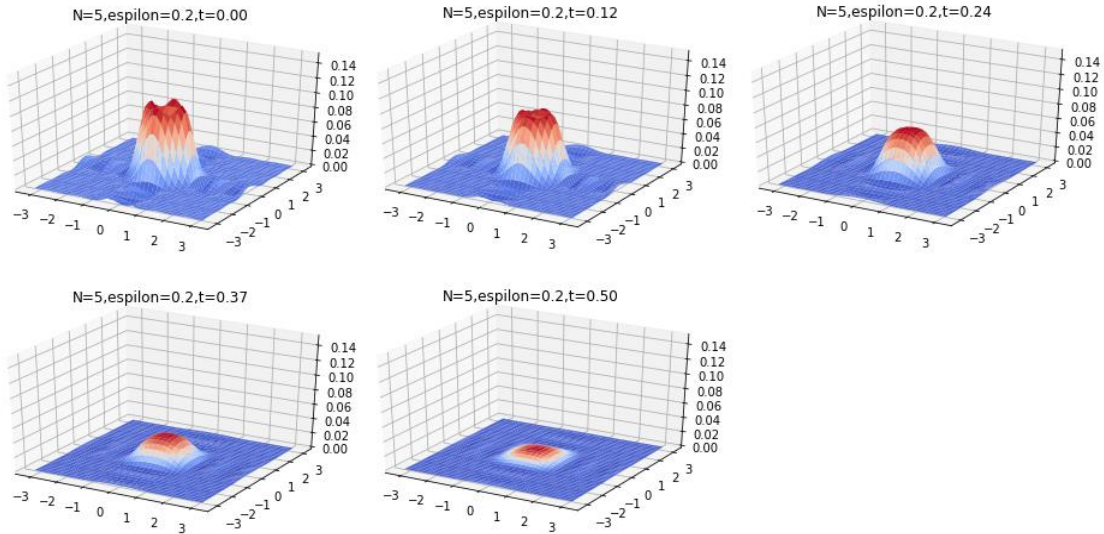
Hình 1. Hàm mật độ $f(v, t)$ tại thời gian $t = 0; 0,12; 0,24; 0,37; 0,5$ và $\varepsilon = 0$

Trong hình 1 với $\varepsilon = 0$ dung dịch đạt giá trị bảo hòa tại thời gian $t = 0,24$ và có giá trị 0,10.



Hình 2. Hàm mật độ $f(v, t)$ tại thời gian $t = 0; 0,12; 0,24; 0,37; 0,5$ và $\varepsilon = 0,1$

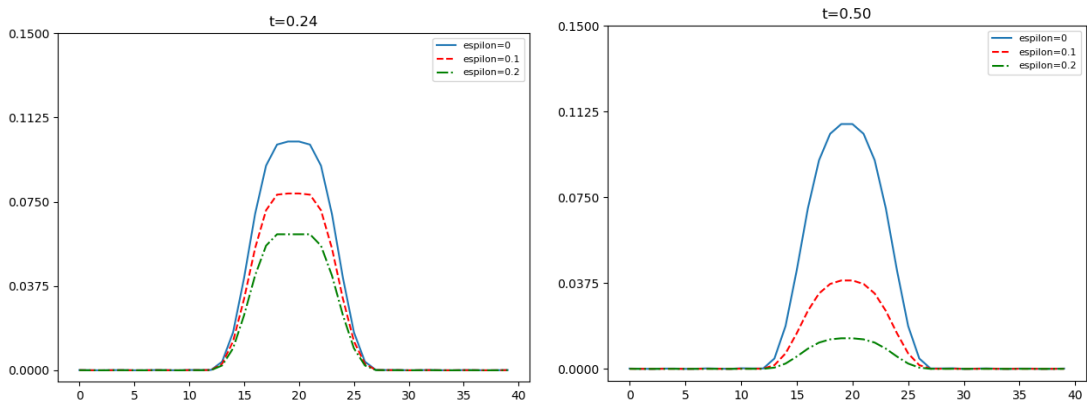
Hình 2 so sánh hàm mật độ chất khí trong hai trường hợp $\epsilon = 0$ và $\epsilon = 0,1$, hàm mật độ khí với $\epsilon = 0$ có giá trị thấp hơn 0,3 tại $t = 0,24$; 0,4 tại $t = 0,37$ và 0,6 tại $t = 0,50$



Hình 3. Hàm mật độ $f(v, t)$ tại thời gian $t = 0; 0,12; 0,24; 0,37; 0,5$ và $\epsilon = 0,2$

So với trường hợp $\epsilon = 0$ thì với $\epsilon = 0,2$ hàm mật độ khí có giá trị thấp hơn 0,4 tại $t = 0,24$; 0,7 tại $t = 0,37$ và 0,9 tại $t = 0,50$ (Hình 3).

Với $v = (v_1, v_2) \in [-40, 40]$, cho $v_2 = 0$ ta có $v = (v_1, 0) \in [-40, 40]$, hình 4 biểu diễn mặt cắt lớp của hàm mật độ khí f tại ba mốc thời gian $t = 0; 0,24; 0,5$ ứng với các giá trị của f khi $\epsilon = 0; 0,1; 0,2$.



Hình 4. So sánh hàm mật độ $f(v, t)$ tại thời gian $t = 0,24$; và 0,5 với $\epsilon = 0; 0,1; 0,2$

Với kết quả của thí nghiệm chúng tôi thấy rằng độ nhớt làm hàm mật độ khí nhỏ hơn, đây là điều chúng tôi mong đợi. Hàm mật độ khí sẽ giảm khi giá trị độ nhớt ϵ lớn.

Lời cảm ơn: Tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành đến thầy Trần Minh Bình đã đề xuất và hướng dẫn thực hiện nghiên cứu bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] P. Germain, A.D. Ionescu, M.B. Tran, “Optimal local well-posedness theory for the kinetic wave equation”, arXiv preprint arXiv:1711.05587, 2017
- [2] T.T. Nguyen, M.B. Tran, “Uniform in time lower bound for solutions to a quantum boltzmann equation of bosons”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Available online 27 June 2018
- [3] A. Soffer and M.B. Tran, “On the dynamics of finite temperature trapped bose gases”, *Advances in Mathematics*, vol. 325, pp. 533–607, 2018.
- [4] A. Soffer, M.B. Tran, “On coupling kinetic and schrodinger equations”, *Journal of Differential Equations*, vol. 265, no. 5, pp. 2243–2279, 2018.
- [5] S. Muralikrishnan, M.B. Tran, T.B. Thanh, “An Iterative HDG Framework for Partial Differential Equations”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 39, no. 5, pp. S782–S808, 2017.
- [6] T.T. Nguyen, M.B. Tran, “On the Kinetic Equation in Zakharov's Wave Turbulence Theory for Capillary Waves”, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 50, no. 2, 2020–2047, 2018.
- [7] S. Muralikrishnan, M.B. Tran, T.B. Thanh, “An improved iterative HDG approach for partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, vol. 367, pp. 295–321, 2018
- [8] S. Jin, M.B. Tran, “Quantum hydrodynamic approximations to the nite temperature trapped bose gases”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 380–381, pp. 45–57, 2018.
- [9] M.B. Tran, “Convergence to Equilibrium of Some Kinetic Models”, *Journal of Differential Equations*, vol. 255, no. 3, pp. 405–440, 2013.
- [10] M. Escobedo, M.B. Tran, “Convergence to equilibrium of a linearized quantum Boltzmann equation for bosons at very low temperature”, *Kinetic and Related Models*, vol. 8, no. 3, pp. 493–531, 2015.
- [11] I.M. Gamba, L.M. Smith, M.B. Tran, “On the wave turbulence theory for stratified flows in the ocean”, arXiv preprint arXiv:1709.08266, 2017.
- [12] R. Alonso, I.M. Gamba, M.B. Tran, “The Cauchy problem and BEC stability for the quantum Boltzmann-Condensation system for bosons at very low temperature”, arXiv preprint arXiv:1609.07467, 2016.
- [13] G. Craciun, M.B. Tran, “A reaction network approach to the convergence to equilibrium of quantum boltzmann equations for bose gases”, arXiv preprint arXiv:1608.05438, 2016.
- [14] L.E. Reichl, M.B. Tran, “A kinetic model for very low temperature dilute bose gases”, arXiv preprint arXiv:1709.09982, 2017.
- [15] M.B. Tran, G. Craciun, L.M. Smith, S. Boldyrev, “A reaction network approach to the theory of acoustic wave turbulence”, submitted
- [16] A. Soffer, M.B. Tran, “On the energy cascade of acoustic wave turbulence: Beyond Kolmogorov-Zakharov solutions”, submitted
- [17] D. Benedetto, E. Caglioti, M. Pulvirenti, “A kinetic equation for granular media”, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, vol. 31, pp. 615–641, 1997.
- [18] Erratum: “A kinetic equation for granular media”, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, vol. 33, no. 2, pp. 439–441, 1999.
- [19] G.A. Bird, “Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows”, *Oxford Engineering Science Series*, vol. 42, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1994.
- [20] A. Bobylev, S. Rjasanow, “Difference scheme for the Boltzmann equation based on the fast Fourier transform”, *European J. Mech. B Fluids*, vol. 16, no. 2, pp. 293–306, 1997.
- [21] A.V. Bobylev, “The theory of the nonlinear spatially uniform Boltzmann equation for Maxwell molecules”, *Mathematical Physics Reviews*, vol. 7, Harwood Academic Publ., Chur, pp. 111–233, 1988.
- [22] A.V. Bobylev, S. Rjasanow, “Fast deterministic method of solving the Boltzmann equation for hard spheres”, *Eur. J. Mech. B Fluids*, vol. 18, no. 5, pp. 869–887, 1999.
- [23] A.V. Bobylev, S. Rjasanow, “Numerical solution of the Boltzmann equation using a fully conservative difference scheme based on the fast Fourier transform”, *Transport Theory Statist. Phys.*, vol. 29, no. 3-5, pp. 289–310, 2000.
- [24] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang, “Spectral methods in fluid dynamics”, Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [25] T. Carleman, “Sur la théorie de l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann”, *Acta Math.*, vol. 60, 1932.
- [26] C. Cercignani, “Theory and application of the Boltzmann equation”, Elsevier, New York, 1975.
- [27] C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti, “The mathematical theory of dilute gases”, *Applied Mathematical Sciences*, vol. 106, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [28] P. Degond, B. Lucquin-Desreux, “The Fokker-Planck asymptotics of the Boltzmann collision operator in the Coulomb case”,

M3AS, no. 2, pp. 167–182, 1992.

- [29] M. Escobedo, S. Mischler, “On a quantum Boltzmann equation for a gas of photons”, *J. Math. Pures Appl.*, no. 9, pp. 417–515, 2001.
- [30] F. Filbet, G. Russo, “High order numerical methods for the space nonhomogeneous Boltzmann equation”, *J. Comput. Phys.*, vol. 186, no. 2, pp. 457–480, 2003.
- [31] I. Ibragimov, S. Rjasanow, “Numerical solution of the Boltzmann equation on the uniform grid”, *Computing*, vol. 69, no. 2, pp. 163–186, 2002.
- [32] P.A. Markowich, C.A. Ringhofer, C. Schmeiser, “Semiconductor equations”, SpringerVerlag, Vienna, 1990.
- [33] K. Nanbu, “Direct simulation scheme derived from the Boltzmann equation”, *I. Monocomponent gases, J. Phys. Soc. Japan*, vol. 52, pp. 2042–2049, 1983.
- [34] L. Pareschi, B. Perthame, “A Fourier spectral method for homogeneous Boltzmann equations”, *Transport Theory Statist. Phys.*, vol. 25, no. 3-5, pp. 369–382, 1996.
- [35] L. Pareschi, G. Russo, “Numerical solution of the Boltzmann equation”, I. Spectrally accurate approximation of the collision operator, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 37, no. 4, pp. 1217–1245, 2000.
- [36] L. Pareschi, G. Russo, “On the stability of spectral methods for the homogeneous Boltzmann equation”, *Transport Theory Statist. Phys.*, vol. 29, no. 3–5, 431–447, 2000.

Spectral method for the Boltzmann equation for gases with viscosity

Dinh Phan Cao Nguyen

Nha Trang University

Corresponding author: nguyendpc@ntu.edu.vn

Received: 24-08-2018; Accepted: 09-11-2018; Published: 31-12-2018

Abstract—We propose in this paper a spectral method for the Boltzmann equation for gases with viscosity/friction. We describe the density of particles and compare the results in the case of gases with friction and rarefied gas. This is the first numerical result for the equation. We show numerically that under the presence of the viscosity, the solution dissipates to 0. The larger the viscosity is, the faster the solution converges to 0.

Keywords—Boltzmann equation, numerical analysis, spectral methods, molecular friction, density function