

Áp dụng phương pháp trung bình ngẫu nhiên bậc cao cho hệ Van der Pol với thời gian trễ chịu kích động ngẫu nhiên

Dương Ngọc Hào, Nguyễn Đông Anh, Nguyễn Quang Dũng

Tóm tắt—Bài báo nghiên cứu hệ Van der Pol với thời gian trễ chịu kích động ngẫu nhiên bằng phương pháp trung bình ngẫu nhiên bậc cao. Trước hết, hệ ban đầu được xấp xỉ với hệ không còn trễ thời gian với giả thiết các biến trạng thái là các quá trình biến đổi chậm. Sau đó, áp dụng phương pháp trung bình ngẫu nhiên bậc cao cho hệ tương đương này. Bằng cách này, lần đầu tiên nghiệm xấp xỉ bậc ba dạng giải tích của hàm mật độ xác suất dừng của hệ Van der Pol có trễ thời gian được tính. Ảnh hưởng của tham số trễ thời gian lên đáp ứng được khảo sát. Kết quả tính toán được so sánh với mô phỏng Monte-Carlo cho thấy nghiệm trung bình bậc hai có độ chính xác tốt hơn nhiều so với nghiệm trung bình tiêu chuẩn.

Từ khóa—Van der Pol, phương pháp trung bình ngẫu nhiên, thời gian trễ, kích động ngẫu nhiên

1 GIỚI THIỆU

Phương pháp trung bình ngẫu nhiên lần đầu tiên được đề xuất bởi Stratonovich [1], là phương pháp được phát triển từ phương pháp trung bình cho hệ tắt định do các nhà khoa học người Nga Krylov và Bogoliubov [2] phát minh. Phương pháp này được sử dụng rộng rãi để phân tích gần đúng các hệ dao động có cân yếu chịu kích động ngẫu nhiên dải rộng (Roberts và Spanos, 1986 [3]). Phương pháp này cho phép thay thế các quá trình Markov hai chiều cơ bản cho đáp ứng bằng một quá trình Markov một chiều cho quá trình biên độ $a(t)$ của đáp ứng. Phương trình Fokker-Planck

(FP) tương ứng cho $a(t)$ có thể được giải giải tích dễ dàng cho ta biểu thức của phân bố xác suất dừng của quá trình biên độ. Bằng cách xem xét quá trình pha tương ứng, có thể có được biểu thức giải tích gần đúng cho phân phối đồng thời của chuyển dịch và vận tốc của đáp ứng, từ đó có thể tính được các số liệu thống kê liên quan.

Trong phương pháp này, đáp ứng của hệ có cân yếu chịu kích động dải rộng được xấp xỉ bởi một quá trình khuếch tán. Các hệ số của phương trình FP tương ứng được tính toán dựa trên phép lấy trung bình các phương trình chuyển động. Điểm mạnh của những phương pháp này ở chỗ chúng thường làm giảm số chiều của bài toán và làm đơn giản các tính toán tìm nghiệm. Với các ưu điểm này chúng cũng được áp dụng cho các hệ trong đó các đáp ứng đã là Markov. Phương pháp trung bình được sử dụng rộng rãi trong các vấn đề dự đoán đáp ứng, phân tích ổn định... [4, 5].

Dù được áp dụng rộng rãi và khá hiệu quả nhưng phương pháp trung bình ngẫu nhiên cũng có hạn chế là trong vài trường hợp, các thông số phi tuyến bị mất trong quá trình trung bình hoá. Để khắc phục điều này, tác giả N.D. Anh cùng cộng sự [6-8] đã mở rộng phương pháp trung bình ngẫu nhiên theo các tính toán bậc cao hơn.

Mục đích của bài báo này là áp dụng phương pháp trung bình ngẫu nhiên bậc cao để tìm nghiệm trung bình bậc ba cho hệ Van der Pol chịu kích động ngẫu nhiên và lực điều khiển với thời gian trễ. Đây là hệ dao động phi tuyến kinh điển với thành phần cân phi tuyến. Cấu trúc của bài báo như sau: trong mục 2, chúng tôi trình bày phương pháp trung bình ngẫu nhiên bậc cao áp dụng cho hệ có thời gian trễ chịu kích động ngẫu nhiên trong trường hợp tổng quát; sau đó áp

Ngày nhận bản thảo 10-06-2017; Ngày chấp nhận đăng 02-01-2018; Ngày đăng 30-8-2018

Dương Ngọc Hào^{1,*}, Nguyễn Đông Anh², Nguyễn Quang Dũng³ – ¹Trường Đại học Công nghệ thông tin, ĐHQG-HCM, ²Viện Cơ học Hà Nội, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, ³Trường Đại học Công nghệ, ĐHQG, Hà Nội, ⁴Trường Đại học Công nghiệp Tp. HCM

*Email: haodn@uit.edu.vn

dụng vào hệ dao động Van der Pol được trình bày trong mục 3; mục 4 trình bày kết quả so sánh số giữa nghiệm giải tích và kết quả mô phỏng bằng phương pháp Monte-Carlo. Bài viết kết thúc bằng một số kết luận trong mục 5.

2 PHƯƠNG PHÁP

Phương pháp trung bình ngẫu nhiên bậc cao

Xét hệ một bậc tự do chịu kích động ngẫu nhiên được mô tả bởi phương trình ô-tônôm

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) + \sqrt{\varepsilon} g(x, \dot{x}) \xi_t \quad (1)$$

trong đó ξ_t là nhiễu trắng với cường độ đơn vị, ε là tham số dương nhỏ, $\omega > 0$, f và g là hàm dạng đa thức của chuyển dịch và vận tốc.

Giả sử phương trình (1) có đáp ứng dừng. Khi đó phương trình (1) có thể được xem như một hệ phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$\begin{aligned} dx &= x dt \\ d\dot{x} &= \left[-\omega^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) \right] dt + \sqrt{\varepsilon} g(x, \dot{x}) dB_t \end{aligned} \quad (2)$$

trong đó B_t là chuyển động Brown tiêu chuẩn. Khi $\varepsilon = 0$, phương trình (1) có nghiệm tuần hoàn dạng:

$$x = a(t) \cos \varphi, \quad \dot{x} = -a(t) \omega \sin \varphi, \quad \varphi = \omega t + \theta(t) \quad (3)$$

Để áp dụng phương pháp trung bình ngẫu nhiên, biến đổi cặp trạng thái (x, \dot{x}) theo biên độ và pha (a, θ) theo công thức (3). Áp dụng qui tắc Itô, hệ (2) được trình bày như sau:

$$\begin{aligned} da &= \varepsilon \left[\frac{1}{2a\omega^2} g^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{\omega} f \sin \varphi \right] dt - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega} g \sin \varphi dB_t, \\ d\theta &= \varepsilon \left[-\frac{1}{2a\omega^2} g^2 \sin 2\varphi - \frac{1}{a\omega} f \cos \varphi \right] dt - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{a\omega} g \cos \varphi dB_t, \end{aligned} \quad (4)$$

trong đó

$$f = f(x, \dot{x}), \quad g = g(x, \dot{x}) \quad (5)$$

Phương trình Fokker-Planck (FP) cho hàm mật độ xác suất $W(a, \theta, t)$ của hệ (4) có dạng:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial a} (K_1 W) + \frac{\partial}{\partial \theta} (K_2 W) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} (K_{11} W) + 2 \frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta} (K_{12} W) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (K_{22} W) \right] \right\} \quad (6)$$

trong đó

$$\begin{aligned} K_1(a, \varphi) &= \frac{1}{2a\omega^2} g^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{\omega} f \sin \varphi, \\ K_2(a, \varphi) &= -\frac{1}{2a\omega^2} g^2 \sin 2\varphi - \frac{1}{a\omega} f \cos \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{11}(a, \varphi) &= \frac{1}{\omega^2} \sin^2 \varphi g^2(a, \varphi), \\ K_{12}(a, \varphi) &= \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{a\omega^2} g^2(a, \varphi), \\ K_{22}(a, \varphi) &= \frac{\cos^2 \varphi}{a^2 \omega^2} g^2(a, \varphi). \end{aligned} \quad (7)$$

Như đã biết, giải phương trình FP là một việc rất khó. Tuy nhiên, có thể giải xấp xỉ nó bằng cách dùng phương pháp trung bình. Trung bình hoá phương trình FP (6) được phương trình FP trung bình

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial a} (\bar{K}_1 W) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{K}_2 W) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} (\bar{K}_{11} W) + 2 \frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta} (\bar{K}_{12} W) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\bar{K}_{22} W) \right] \right\} \quad (8)$$

với dấu gạch trên chỉ toán tử trung bình theo thời gian t ,

$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\varphi. \quad (9)$$

Nếu hàm mật độ xác suất dừng $W(a, \theta)$ tồn tại thì nó sẽ thỏa phương trình

$$\frac{\partial}{\partial a} (\bar{K}_1 W) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{K}_2 W) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} (\bar{K}_{11} W) + 2 \frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta} (\bar{K}_{12} W) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\bar{K}_{22} W) \right] \quad (10)$$

Nghiệm của phương trình (10) phải không âm và được chuẩn hoá. Vì phương trình (1) là ô-tônôm nên phương trình (8) ở dạng đơn giản

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial a} (\bar{K}_1(a) W) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} (\bar{K}_{11}(a) W) \right] \quad (11)$$

Vì vậy phương trình (10) trở thành

$$\frac{\partial}{\partial a}(\bar{K}_1(a)W) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2}(\bar{K}_{11}(a)W), \quad (12)$$

với điều kiện ban đầu $W(a, t|a_0, t_0)$. Giải phương trình (12) được nghiệm

$$W(a) = \frac{C}{\bar{K}_{11}(a)} \exp \left\{ \int \frac{2\bar{K}_1(a)}{\bar{K}_{11}(a)} da \right\}, \quad (13)$$

trong đó C là hằng số chuẩn hoá xác định từ điều kiện

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty W(a, \varphi) da d\varphi = 1 \quad (14)$$

Để tìm nghiệm xấp xỉ bậc cao của phương trình (6), định nghĩa hai toán tử sau với $K_j(a, \varphi)$, $K_{ij}(a, \varphi)$, $i, j = 1, 2$ là các hàm cho trước [7]

$$[K_i, K_j]L(W) = \frac{\partial}{\partial a}(K_i W) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(K_j W) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}(K_{11}W) + \frac{2\partial^2}{\partial a \partial \varphi}(K_{12}W) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(K_{22}W) \right]$$

$$[K_i, K_j]^\ell(W) = \frac{\partial K_1}{\partial a} + \frac{\partial K_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K_{11}}{\partial a^2} - \frac{\partial K_{12}}{\partial a \partial \varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K_{22}}{\partial \varphi^2} + \left(K_1 - \frac{\partial K_{11}}{\partial a} - \frac{\partial K_{12}}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial W}{\partial a} + \left(K_2 - \frac{\partial K_{12}}{\partial \varphi} - \frac{\partial K_{22}}{\partial a} \right) \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \left\{ K_{11} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial a^2} + \left(\frac{\partial W}{\partial a} \right)^2 \right) + 2K_{12} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial a \partial \varphi} + \frac{\partial W}{\partial a} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) + K_{22} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 \right) \right\}.$$

Với ký hiệu toán tử trên, phương trình (6) được viết lại dạng

$$\omega \frac{\partial W}{\partial \varphi} = -\varepsilon [K_i, K_{ij}]L(W) \quad (15)$$

Giả sử

$$K_i(a, \varphi, \varepsilon) = K_{i0}(a, \varphi) + R_{i1}(a, \varphi)\varepsilon + R_{i2}(a, \varphi)\varepsilon^2 + \dots, i = 1, 2 \quad (16)$$

Khi đó nghiệm xấp xỉ của (6) có thể tìm được dưới dạng

$$W \approx W_0 + \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \dots \quad (17)$$

trong đó

$$W_0(a) = \frac{C}{\bar{K}_{11}} \exp \left(\int 2 \frac{\bar{K}_{10}}{\bar{K}_{11}} da \right), \quad (18)$$

$$W_1(a, \varphi) = -\frac{1}{\omega} \int [K_{i0}, K_{ij}]L(W_0) d\varphi = W_0(a)(W_{10}(a) + W_{11}(a, \varphi)) \quad (19)$$

$$W_2(a, \varphi) = -\frac{1}{\omega} \int \{ [K_{i0}, K_{ij}]L(W_1) - [R_{i1}, 0]L(W_0) \} d\varphi = W_0(a)(W_{20}(a) + W_{22}(a, \varphi)) \quad (20)$$

$$W_n(a, \varphi) = -\frac{1}{\omega} \int \left\{ [K_{i0}, K_{ij}]L(W_{n-1}) - \sum_{r=1}^{n-1} [R_{ir}, 0]L(W_{n-1-r}) \right\} d\varphi, \quad n = 3, 4, \dots \quad (21)$$

với

$$W_{11}(a, \varphi) = -\frac{2}{\omega} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \left\{ \overline{[K_{i0}, K_{ij}]^\ell(\ln W_0(a)) \cos n\varphi} \sin n\varphi - \overline{[K_{i0}, K_{ij}]^\ell(\ln W_0(a)) \sin n\varphi} \cos n\varphi \right\}, \quad (22)$$

$$W_{10}(a) = \int \left[\frac{2\bar{K}_{10}W_{11}}{\bar{K}_{11}} - \frac{\partial}{\partial a} \overline{K_{11}W_{11}} - \overline{K_{11}W_{11}} \frac{1}{W_0(a)} \frac{\partial W_0(a)}{\partial a} - 2 \frac{\partial \bar{R}_{11}}{\partial a} - 2\bar{R}_{11} \frac{1}{W_0(a)} \frac{\partial W_0(a)}{\partial a} \right] da, \quad (23)$$

$$W_{22}(a, \varphi) = -\frac{1}{\omega} \int \left\{ [K_{i0}W_{11} + K_{i0}W_{10}, K_{ij}W_{11} + K_{ij}W_{10}]^\ell(\ln W_0(a)) - \frac{\partial R_{11}}{\partial a} - \frac{R_{11}}{W_0(a)} \frac{\partial W_0(a)}{\partial a} - \frac{\partial R_{21}}{\partial \varphi} \right\} d\varphi, \quad (24)$$

$$W_{20}(a) = \int \frac{1}{\bar{K}_{11}} \left\{ \overline{K_{10}W_{22}} - \frac{\partial}{\partial a} \overline{K_{11}W_{22}} - \overline{K_{11}W_{22}} \frac{1}{W_0(a)} \frac{\partial W_0(a)}{\partial a} + 2 \overline{R_{11}(W_{10} + W_{11})} + \overline{R_{21}} \right\} da. \quad (25)$$

Từ các phương trình (17) đến (25), có xấp xỉ bậc ba cho nghiệm dừng của (6) là

$$W(a, \varphi) = W_0(a) \{ 1 + \varepsilon (W_{10}(a) + W_{11}(a, \varphi)) + \varepsilon^2 (W_{20}(a) + W_{22}(a, \varphi)) \} \quad (26)$$

Để ý, nghiệm (26) có thể âm, tuy nhiên điều này thường khó xảy ra khi khai triển hàm mật độ theo phương pháp ở trên.

Nghiệm trung bình bậc cao của hệ Van der Pol ngẫu nhiên với thời gian trễ

Mục này chúng tôi sử dụng phương pháp trung bình ngẫu nhiên bậc cao được trình bày trong phần trước để nghiên cứu đáp ứng của hệ Van der Pol dưới tác dụng của lực điều khiển trễ và kích động ngẫu nhiên có dạng

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \varepsilon \left[(\alpha - \beta x^2)x + \zeta x_\Delta + \zeta' \dot{x}_\Delta \right] = \sqrt{\varepsilon} \sigma \xi_t \quad (27)$$

với $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\omega \neq 0$, ζ, ζ', Δ là các hằng số, ε là tham số dương nhỏ, $x_\Delta = x(t - \Delta)$, $\dot{x}_\Delta = \dot{x}(t - \Delta)$, ξ_t là nhiễu trắng dạng Gauss với cường độ đơn vị.

Tim nghiệm của phương trình (27) ở dạng (3) sẽ có

$$\begin{aligned} x_\Delta &= a(t - \Delta) \cos[\omega(t - \Delta) + \theta(t - \Delta)], \\ \dot{x}_\Delta &= -a(t - \Delta)\omega \sin[\omega(t - \Delta) + \theta(t - \Delta)], \end{aligned} \quad (28)$$

Từ (4), thấy rằng a và θ tỉ lệ với tham số bé ε nên có thể giả thiết rằng $a(t)$ và $\theta(t)$ là các quá trình biến đổi chậm. Do đó, trong một chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ta có thể thay $a(t - \Delta)$ bằng $a(t)$ và $\theta(t - \Delta)$ bằng $\theta(t)$. Sử dụng xấp xỉ này và (28) thay vào phương trình (27) thu được phương trình dao động không còn thời gian trễ:

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \varepsilon \left[-\beta x^2 x + \eta x + \kappa \dot{x} \right] = \sqrt{\varepsilon} \sigma \xi_t \quad (29)$$

với

$$\begin{aligned} \eta &= \zeta \cos \omega \Delta + \omega \zeta' \sin \omega \Delta, \\ \kappa &= \alpha + \zeta \cos \omega \Delta - \zeta \omega^{-1} \sin \omega \Delta. \end{aligned} \quad (30)$$

Từ (5) và (7) tính được

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 &= -\frac{1}{8} a^3 \beta + \frac{\kappa a}{2} + \frac{\sigma^2}{4a\omega^2} \\ \bar{K}_2 &= \frac{3a^2 \gamma}{8\omega} - \frac{\eta}{2\omega}, \\ \bar{K}_{11} &= \frac{\sigma^2}{2\omega^2}, \bar{K}_{12} = 0, \bar{K}_{22} = \frac{\sigma^2}{2a^2 \omega^2}, \end{aligned} \quad (31)$$

Vì \bar{K}_{11} là hằng số nên từ (18) tính được xấp xỉ bậc một cho hàm mật độ xác suất của hệ (27) là

$$W_0(a) = C_0 \exp \int \frac{2\bar{K}_1}{\bar{K}_{11}} da = C_0 a \exp \left\{ \frac{\kappa \omega^2 a^2}{\sigma^2} - \frac{\omega^2 a^4 \beta}{8\sigma^2} \right\} \quad (32)$$

với C_0 tính từ (14)

$$C_0 = \frac{\omega \sqrt{2\beta}}{2\pi \sqrt{\pi} \sigma} \exp \left(-\frac{2\omega^2 \kappa^2}{\sigma^2 \beta} \right) \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\omega \kappa \sqrt{2}}{\sigma \sqrt{\beta}} \right) \right]^{-1} \quad (33)$$

trong đó, $\operatorname{erf}(x)$ là hàm sai số xác định bởi phương trình

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$$

Để tìm nghiệm xấp xỉ bậc hai và bậc ba của (15), tính theo các công thức (22) và (23) được

$$\begin{aligned} W_{11}(a, \varphi) &= \frac{\omega \beta a^4 \sin 4\varphi}{64\sigma^2} (\beta a^2 - 4\kappa) - \frac{\beta a^2 \sin 2\varphi}{32\omega \sigma^2} (\beta \omega^2 a^4 - 12\sigma^2 - 4\omega^2 \kappa a^2) \\ &\quad + \frac{a^2 \eta \cos 2\varphi}{8\sigma^2} (\beta a^2 - 4\kappa). \end{aligned} \quad (34)$$

$$W_{10}(a) = -\frac{\eta \kappa a^2}{2\sigma^2} \quad (35)$$

Từ công thức (24) tính được

$$\begin{aligned} W_{22} &= s_2 \sin 2\varphi + s_4 \sin 4\varphi + s_6 \sin 6\varphi + s_8 \sin 8\varphi \\ &\quad + c_2 \cos 2\varphi + c_4 \cos 4\varphi + c_6 \cos 6\varphi + c_8 \cos 8\varphi, \end{aligned} \quad (36)$$

trong đó

$$s_2 = \frac{\omega \beta^3 \eta}{2^{10} \sigma^4} a^{10} + \frac{\omega \kappa \beta^2 \eta}{2^7 \sigma^4} a^8 - \left(\frac{3\omega \kappa^2 \beta \eta}{2^6 \sigma^4} + \frac{13\beta^2 \eta}{2^8 \omega \sigma^2} \right) a^6 - \frac{\kappa \eta \beta}{16\omega \sigma^2} a^4 + \frac{3\eta \beta}{8\omega^3} a^2,$$

$$s_4 = -\frac{\omega\beta^3\eta}{2^9\sigma^4}a^{10} + \frac{\omega\kappa\beta^2\eta}{32\sigma^4}a^8 + \frac{7\beta^2\eta}{128\omega\sigma^2}a^6 - \frac{5\kappa\eta\beta}{32\omega\sigma^2}a^4,$$

trong đó C_1 là hằng số chuẩn hoá. Nghiệm xấp xỉ bậc ba của (27) là

$$s_6 = \frac{\omega\beta^3\eta}{2^{10}\sigma^4}a^{10} - \frac{\omega\kappa\beta^2\eta}{2^7\sigma^4}a^8 + \left(\frac{\omega\kappa^2\beta\eta}{64\sigma^4} - \frac{\beta^2\eta}{2^8\omega\sigma^2}\right)a^6, \tag{37}$$

$$W_2(a, \varphi) = C_2 a \exp\left(\frac{\kappa\omega^2 a^2}{\sigma^2} - \frac{\omega^2 a^4 \beta}{8\sigma^2}\right) \left\{ 1 + \varepsilon [W_{10}(a) + W_{11}(a, \varphi)] + \varepsilon^2 [W_{20}(a) + W_{22}(a, \varphi)] \right\}, \tag{41}$$

$$c_2 = -\frac{\omega^2\beta^4}{2^{12}\sigma^4}a^{12} + \frac{\omega^2\kappa\beta^3}{2^9}a^{10} - \left(\frac{7\beta^3}{2^{10}\sigma^2} + \frac{\omega^2\kappa^2\beta^2}{2^8\sigma^4}\right)a^8 + \left(\frac{5\kappa\beta^2}{64\sigma^2} - \frac{\eta^2\beta\kappa}{16\sigma^4}\right)a^6 + \left(\frac{\eta^2\beta}{16\omega\sigma^2} - \frac{3\kappa\beta^2}{16\sigma^2} + \frac{\eta^2\kappa^2}{4\sigma^4} + \frac{13\beta^2}{64\omega^2}\right)a^4 - \frac{9\kappa\beta}{16\omega^2}a^2,$$

với C_2 là hằng số chuẩn hoá.

3 KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

$$c_4 = -\frac{\omega^2\beta^4}{2^{12}\sigma^4}a^{12} + \frac{\omega^2\kappa\beta^3}{2^9\sigma^4}a^{10} + \left(\frac{15\beta^3}{2^{10}\sigma^2} - \frac{\omega^2\kappa^2\beta^2}{2^8\sigma^4} + \frac{\eta^2\beta^2}{2^8\sigma^4}\right)a^8 - \left(\frac{\eta^2\beta\kappa}{32\sigma^4} + \frac{17\kappa\beta^2}{2^8\sigma^2}\right)a^6 + \left(\frac{\eta^2\kappa^2}{16\sigma^4} - \frac{11\beta^2}{2^7\omega^2} - \frac{\eta^2\beta}{2^6\omega^2\sigma^2} + \frac{3\kappa^2\beta}{64\omega^2}\right)a^4,$$

Trong bảng tính bên dưới, kết quả mô phỏng số của giá trị trung bình đáp ứng bình phương $E(x^2)$ được tính bằng phương pháp Monte-Carlo với 10.000 mẫu, còn giá trị xấp xỉ trung bình đáp ứng bình phương của hệ (27) được tính bởi

$$c_6 = \frac{\omega^2\beta^4}{2^{12}\sigma^4}a^{12} - \frac{\omega^2\kappa\beta^3}{2^9\sigma^4}a^{10} + \left(\frac{\omega^2\kappa^2\beta^2}{2^8\sigma^4} - \frac{19\beta^3}{3.2^{10}\sigma^2}\right)a^8 + \frac{\kappa\beta^2}{48\omega^2}a^6,$$

$$E(x^2) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty a^2 \cos^2 \varphi W(a, \varphi) d\varphi da \tag{42}$$

$$c_8 = -\frac{\omega^2\beta^4}{2^{14}\sigma^4}a^{12} + \frac{\omega^2\kappa\beta^3}{2^{11}\sigma^4}a^{10} + \left(\frac{\beta^3}{2^{12}\sigma^2} - \frac{\omega^2\kappa^2\beta^2}{2^{10}\sigma^4}\right)a^8. \tag{38}$$

với $W(a, \varphi)$ là mật độ xác suất dừng của hệ (27) được xác định giải tích bởi các công thức (32), (40), (41) tương ứng với các công thức xấp xỉ bậc một, bậc hai và bậc 3.

Tính từ công thức (25) sẽ có được

$$W_{20}(a) = -\frac{89\omega^2\beta^2}{9.2^{14}\sigma^4}a^{12} - \frac{5\omega^2\kappa\beta^3}{2^{11}\sigma^4}a^{10} + \left(\frac{\eta^2\beta^2}{2^8\sigma^4} - \frac{109\beta^3}{2^{13}\sigma^2} + \frac{5\omega^2\kappa^2\beta^2}{2^{10}\sigma^4}\right)a^8 + \left(\frac{29\kappa\beta^2}{384\sigma^2} + \frac{\eta^2\beta\kappa}{32\sigma^4}\right)a^6 + \left(\frac{39\beta^2}{256\omega^2} - \frac{9\kappa^2\beta}{64\sigma^2} - \frac{3\eta^2\beta}{64\omega^2\sigma^2} - \frac{\eta^2\kappa^2}{16\sigma^4}\right)a^4 - \left(\frac{\eta^2\kappa}{4\omega^2\sigma^2} + \frac{9\kappa\beta}{16\omega^2}\right)a^2. \tag{39}$$

Các bảng 1,2 tính toán số với $\alpha = 1$, $\beta = 5$, $\omega = 1$, $\varsigma = 1$, $\zeta = 1$. Kết quả tính từ bảng 1 cho thấy khi tham số trễ Δ tăng từ 0,1 đến 1 thì trung bình đáp ứng giảm dần từ khoảng 0,8 về 0,48. Bảng này cũng cho thấy kết quả tính toán theo phương pháp trung bình bậc cao tốt hơn phương pháp trung bình tiêu chuẩn (bậc 1).

Như vậy, nghiệm xấp xỉ bậc hai của (27) là

$$W_1(a, \varphi) = C_1 a \exp\left(\frac{\kappa\omega^2 a^2}{\sigma^2} - \frac{\omega^2 a^4 \beta}{8\sigma^2}\right) \left\{ 1 + \varepsilon [W_{10}(a) + W_{11}(a, \varphi)] \right\} \tag{40}$$

Bảng 1. So sánh các nghiệm trung bình với mô phỏng số khi Δ thay đổi ($\varepsilon = 0,01$, $\sigma^2 = 1$)

Δ	Mô phỏng số	Xấp xỉ bậc 1		Xấp xỉ bậc 2		Xấp xỉ bậc 3	
		$E_1(x^2)$	Error (%)	$E_2(x^2)$	Error (%)	$E_3(x^2)$	Error (%)
0,1	0,7945	0,8025	1,01	0,803479	1,13	0,803572	1,14
0,2	0,7781	0,7656	1,61	0,766829	1,45	0,766918	1,44
0,4	0,6942	0,6890	0,76	0,690555	0,53	0,690636	0,52
0,6	0,6427	0,6128	4,65	0,614781	4,34	0,614856	4,33
0,8	0,5433	0,5419	0,25	0,544123	0,15	0,544194	0,16
1	0,4823	0,4795	0,58	0,481778	0,10	0,481844	0,08

Bảng 2. So sánh các nghiệm trung bình với mô phỏng số khi Δ thay đổi ($\varepsilon = 0,1, \sigma^2 = 5$)

Δ	Mô phỏng số $E(x^2)$	Xấp xỉ bậc 1		Xấp xỉ bậc 2		Xấp xỉ bậc 3	
		$E_1(x^2)$	Error (%)	$E_2(x^2)$	Error (%)	$E_3(x^2)$	Error (%)
0,1	1,2449	1,14388	8,11	1,18528	4,79	1,24943	0,36
0,2	1,2221	1,11875	8,46	1,16390	4,76	1,22618	0,33
0,4	1,1641	1,06567	8,45	1,11693	4,05	1,17517	0,95
0,6	1,1105	1,01124	8,94	1,06640	3,97	1,12042	0,89
0,8	1,0462	0,95810	8,42	1,01467	3,01	1,06448	1,75
1	1,0113	0,90839	10,17	0,96385	4,69	1,00958	0,17

Bảng 1 và 2 cho thấy khi tham số ε gần không ($\varepsilon = 0,01$ ở Bảng 1) thì các nghiệm trung bình bậc 2 và 3 khá gần nhau nên trường hợp này chỉ cần dùng nghiệm trung bình bậc 2 là đủ. Khi tham số ε lớn hơn ($\varepsilon = 0,1$ ở Bảng 2), nhìn chung, các nghiệm trung bình bậc cao tốt hơn nghiệm trung bình tiêu chuẩn, hơn nữa, nghiệm bậc ba cho kết quả tốt hơn các nghiệm bậc một và bậc hai.

Khi hệ không có trễ thời gian với $\alpha = 1, \beta = 10, \varepsilon = 0,2, \omega = 1, \zeta = 0, \zeta = 0$, Bảng 3

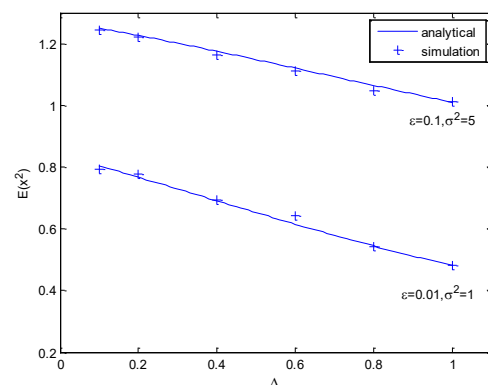
dưới đây cho kết quả tính toán trung bình đáp ứng bình phương của hệ (27) theo (32), (40) và (41), so sánh với giá trị mô phỏng bằng phương pháp Monte-Carlo trong bài báo của Roy và Spanos (1991, p. 124, [9]). Trong trường hợp này, nghiệm trung bình xấp xỉ bậc một và bậc hai trùng nhau, còn nghiệm trung bình bậc ba cho độ chính xác cao hơn hẳn, chẳng hạn khi cường độ kích động ngẫu nhiên là 1, nghiệm trung bình bậc ba cho độ chính xác 2,2% trong khi nghiệm trung bình bậc một là 5,4%.

Bảng 3. So sánh các nghiệm trung bình với mô phỏng số khi σ^2 thay đổi.

σ^2	Mô phỏng số	Xấp xỉ bậc 1		Xấp xỉ bậc 2		Xấp xỉ bậc 3	
		$E_1(x^2)$	Error (%)	$E_2(x^2)$	Error (%)	$E_3(x^2)$	Error (%)
0,1	0,2080	0,20553	1,19	0,20553	1,19	0,20754	0,22
1,0	0,3600	0,34025	5,49	0,34025	5,49	0,36792	2,20
5,0	0,7325	0,64334	12,17	0,64334	12,17	0,82053	12,02

Từ các bảng trên, có thể thấy nghiệm xấp xỉ trung bình bậc ba cho kết quả khá tốt so với nghiệm xấp xỉ bậc một đối với hệ Van der Pol chịu kích động ngẫu nhiên và lực điều khiển với thời gian trễ.

Hình 1 cho thấy sự ảnh hưởng của tham số thời gian trễ lên trung bình đáp ứng bình phương với các tham số hệ là $\alpha = 1, \beta = 5, \omega = 1, \zeta = 1, \zeta = 1$. Tính toán cho thấy trong trường hợp hệ có các tham số như đã nêu thì tham số trễ thời gian của lực điều khiển có xu hướng làm giảm trung bình của đáp ứng bình phương.

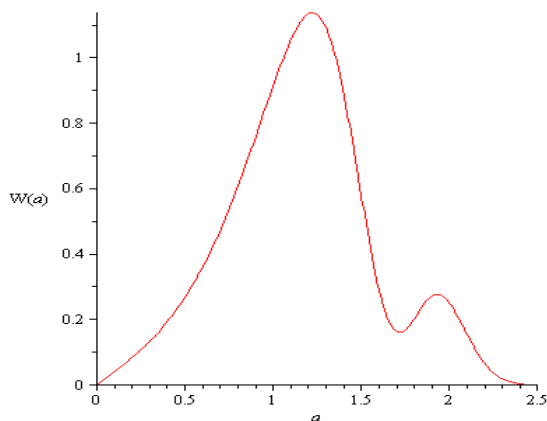


Hình 1. Đồ thị của trung bình đáp ứng bình phương theo tham số trễ Δ

Từ các tính toán trên, có thể tìm được hàm mật độ xác suất dừng của biên độ a từ công thức (46) như sau:

$$W(a) = \int_0^{2\pi} W_2(a, \varphi) d\varphi \quad (43)$$

Thí dụ, với $\varepsilon = 0,2$, $\sigma^2 = 1$, $\Delta = 0,2$ còn các tham số hệ khác như phần trên thì có đồ thị hàm mật độ xác suất dừng của biên độ đáp ứng được cho trong Hình 2.



Hình 2. Đồ thị hàm mật độ xác suất dừng của biên độ đáp ứng

4 KẾT LUẬN

Bài báo đã áp dụng phương pháp trung bình ngẫu nhiên để tính được nghiệm xấp xỉ bậc ba dạng giải tích cho hệ Van der Pol (hệ có hệ số cản phi tuyến) với thời gian trễ và chịu kích động ngẫu nhiên dạng ồn trắng. Kết quả so sánh với mô phỏng Monte-Carlo cho thấy nghiệm bậc ba tốt hơn nhiều so với nghiệm tìm được bằng phương pháp trung bình ngẫu nhiên thông thường (nghiệm bậc nhất). Kết quả tính toán trong bài báo này cho thấy phương pháp trung bình ngẫu nhiên bậc cao khá hiệu quả trong nghiên cứu các hệ dao động có cản phi tuyến chịu kích động ngẫu nhiên với thời gian trễ, đánh giá được tác động của tham số trễ lên nghiệm của hệ: Với các tham số của hệ cho trước như trong mục 4, khi tham số trễ thời gian tăng từ 0,1

đến 1 thì trung bình bình phương đáp ứng giảm dần. Trong các nghiên cứu tiếp theo, chúng tôi sẽ nghiên cứu hiệu quả của phương pháp trung bình ngẫu nhiên bậc cao cho các hệ dao động có độ cứng phi tuyến chịu kích động ngẫu nhiên và lực điều khiển với thời gian trễ.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển Khoa học và Công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 107.04-2015.36.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] R.L. Stratonovich, Topics in the Theory of Random Noise. Vol. II, New York: Gordon and Breach, 1967.
- [2] N.M. Krylov, N.N. Bogoliubov, "Introduction to nonlinear mechanics", Ukraine: Academy of Sciences, 1937.
- [3] J.B. Roberts, P.D. Spanos, "Stochastic averaging: An approximate method of solving random vibration problems", *Non-Linear Mechanics*, vol. 21, no. 2, pp. 111–134, 1986.
- [4] Y.A. Mitropolskii, "Averaging method in non-linear mechanics", *Int. J. Non-linear Mechanics*, Pergamoa Press Ltd., vol. 2, pp. 69–96, 1967.
- [5] Y.A. Mitropolskii, N.V. Dao, N.D. Anh, "Nonlinear oscillations in systems of arbitrary order", *Naykova-Dumka*, Kiev (in Russian), 1992.
- [6] N.D. Anh, "Extended first order stochastic averaging method for class of nonlinear systems", *Journal of Mathematics*, NCNST of VN, vol. 21, no 3&4, 85–93, 1993.
- [7] N.D. Anh, "Higher order random averaging method of coefficients in Fokker-Planck equation", In special volume "Advance in Non-linear structural dynamics" of Sādhanā, Indian Academy of Science, pp. 373–378 (1995).
- [8] Y.A. Mitropolskii, N.D. Anh, N.D. Tinh, "Random oscillatio in the Van der Pol system under the action of a broadband random process", *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 50, no. 11, 1998.
- [9] R.V. Roy, P.D. Spanos, "Padé-type approach to nonlinear random vibration analysis", *Probabilistic Engineering Mechanics*, part 2, vol. 6, no. 3 and 4, pp. 119–128, 1991.

Applying higher order stochastic averaging method to the Van der Pol system with time-delay under random excitation

Duong Ngoc Hao^{1,*}, Nguyen Dong Anh^{2,3}, Nguyen Quang Dung⁴

¹ Department of Math and Phys, University of Information Technology, VNUHCM, Vietnam;

² Institute of Mechanics, VAST; ³ University of Engineering and Technology, VNU, Hanoi, Vietnam;

⁴ Industrial university of Ho Chi Minh city

*Corresponding author: haodn@uit.edu.vn

Received: 10-06-2017; Accepted: 02-01-2018; Published: 30-8-2018

Abstract—The paper investigated the Van der Pol system with time-delay under random excitation by the higher stochastic averaging method. The original system was expressed in terms without time-delay under the assumption that the state variables of the system were slowly varying processes. Then the higher stochastic averaging method was applied on the approximation system. By this technique, the analytical expression of the stationary probability

density function for the Van der Pol system with time-delay under random excitation was shown in higher order approximation for the first time. Effects of the parameter time-delay on the system's response were investigated. The analytical results were suited well to numerical ones obtained by Monte-Carlo method. It was also shown that the higher order averaging solution was better than the one obtained by the traditional stochastic averaging method.

Keywords—Van der Pol, stochastic averaging method, time-delay, random excitation