Tạp chí Phát triển Khoa học và Công nghệ – Khoa học Tự nhiên, 3(4):279-285
Open Access Full Text Article

Bài nghiên cứu

Tập biến phân cấp cao của ánh xạ nhiễu theo nghĩa Benson trong tối ưu đa trị

Hà Mạnh Linh*

TÓM TẮT
Trong bài báo này, chúng tôi tìm hiểu về chủ đề phân tích độ nhạy trong tối ưu đa trị, đây là một hướng nghiên cứu thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới trong những năm gần đây. Dạng đạo hàm chính sử dụng trong bài là tập biến phân cấp cao (được giới thiệu bởi Khánh và Tuấn năm 2008). Đây có thể xem là một dạng suy rộng của đạo hàm contingent (được biết như là đạo hàm đầu tiên và phổ biến trong tối ưu đa trị). Đầu tiên, chúng tôi nghiên cứu về mối quan hệ giữa tập biến phân cấp cao của một ánh xạ đa trị cho trước và tập biến phân cấp cao của ánh xạ prôfin (ánh xạ mở rộng theo nón) của nó. Sau đó, chúng tôi thiết lập kết quả về tập biến phân cấp cao của ánh xạ nhiễu theo nghĩa nghiệm hữu hiệu Benson ứng với một dạng bài toán tối ưu đa trị, ánh xạ nhiễu này được xây dựng trong không gian mục tiêu. Cuối cùng, từ kết quả đạt được, chúng tôi áp dụng vào bài toán tối ưu đa trị có tham số, nghĩa là ánh xạ mục tiêu và ánh xạ ràng buộc đều phụ thuộc vào một tham số nào đó. Cụ thể là các kết quả về phân tích độ nhạy cho ánh xạ nghiệm theo nghĩa Benson của bài toán tối ưu đa trị có tham số được thiết lập. Nội dung bài báo cung cấp thêm một số áp dụng của tập biến phân cấp cao trong tối ưu đa trị.
Từ khoá: Tập biến phân cấp cao, ánh xạ nhiễu theo nghĩa Benson, tối ưu đa trị, phân tích độ nhạy

GIỚI THIỆU

Phân tích độ nhạy đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết tối ưu. Nhiều kết quả trong chủ đề này đã và đang được phát triển mạnh mẽ. Cụ thể, trong kết quả về phân tích độ nhạy trong tối ưu đa mục tiêu và tối ưu vectơ lồi được nghiên cứu bởi Tanino [1,2]. Shi dùng đạo hàm tiếp xúc để tìm hiểu về ánh xạ nhiễu trong tối ưu vectơ [3,4]. Một số kết quả phân tích độ nhạy cấp một cũng được đề cập trong [5,6]. Với phân tích độ nhạy cấp cao, người đọc có thể tham khảo [7–11].

Khi nghiên cứu về phân tích độ nhạy, khái niệm đạo hàm đóng vai trò quan trọng. Gần đây, nhiều dạng đạo hàm suy rộng được giới thiệu với các áp dụng trong điều kiện tối ưu và đối ngẫu, xem [3,11–16]. Trong bài báo này, chúng tôi dùng tập biến phân cấp cao [16,17], được xem như một dạng đạo hàm suy rộng, làm công cụ chính trong việc thiết lập kết quả về phân tích độ nhạy. Trong không gian ảnh, tập biến phân rộng hơn hầu hết miền ảnh của các dạng đạo hàm đã biết. Do đó, khi áp dụng vào điều kiện cần tối ưu (dạng gốc/dạng tách tập) ta sẽ thu được kết quả tốt hơn so với những điều kiện tối ưu dùng một số dạng đạo hàm khác. Đây cũng là một khái niệm được mở rộng sang cấp cao (hơn cấp hai) so với nhiều dạng đạo hàm đã biết (chủ yếu được phát biểu cho cấp một và cấp hai). Một điểm thuận lợi khác của tập biến phân đó là hầu như không cần nhiều giả thiết phức tạp cho việc tồn tại và khác rỗng của khái niệm này.

Anh và Khánh áp dụng tập biến phân để thu được các kết quả về phân tích độ nhạy trong tối ưu đa trị [9]. Tuy nhiên, các kết quả chính chỉ thoả cho ánh xạ nhiễu yếu và tập nghiệm hữu hiệu yếu. Nếu thay bằng ánh xạ nhiễu và tập nghiệm hữu hiệu Pareto thì đa số kết quả không còn đúng nữa. Từ nhận xét trên, trong bài báo này chúng tôi sẽ nghiên cứu phân tích độ nhạy của bài toán tối ưu ứng với ánh xạ nhiễu thật sự theo nghĩa Benson và tập nghiệm nghiệm hữu thật sự theo nghĩa Benson. Từ kết quả đó, chúng tôi có thể phát biểu Mệnh đề 4.1, Định lý 5.3 của bài [9] cho ánh xạ nhiễu và tập nghiệm hữu hiệu Pareto.

Bố cục của bài báo này như sau: trong phần mở đầu, chúng tôi nhắc lại các khái niệm và kết quả cần thiết cho những phần sau. Phần tiếp theo trình bày về tập biến phân cấp cao của ánh xạ nhiễu theo nghĩa Benson. Trong phần Áp dụng vào phân tích độ nhạy, chúng tôi áp dụng kết quả của phần Tập biến phân cấp cao của ánh xạ nhiễu theo nghĩa Benson cho phân tích độ nhạy của bài toán tối ưu tham số.

MỞ ĐẦU

Trong bài báo này, xét X, Y là các không gian định chuẩn, C là nón lồi có đỉnh trong không gian Y. Ký hiệu 0_X là điểm gốc của không gian X. Cho S là tập

Trường Đại học Công nghệ Thông tin, ĐHQG-HCM

Liên hệ

Hà Mạnh Linh, Trường Đại học Công nghệ Thông tin, ĐHQG-HCM

Email: linhhm@uit.edu.vn

Lịch sử
- Ngày nhận: 11-03-2019
- Ngày chấp nhận: 17-10-2019
- Ngày đăng: 25-12-2019

DOI : 10.32508/stdjns.v3i4.696

Trích dẫn bài báo này: Linh H M. **Tập biến phân cấp cao của ánh xạ nhiễu theo nghĩa Benson trong tối ưu đa trị**. *Sci. Tech. Dev. J. - Nat. Sci.;* 3(4):279-285.

con khác rỗng của Y, khi đó $cl(S)$ là bao đóng của tập S. Tập lồi khác rỗng B được gọi là cơ sở của nón C nếu $0_Y \notin cl(B)$ và $cone(B) = C$, trong đó $cone(B) := \{ty | t \geq 0, y \in B\}$.

Định nghĩa 2.1

(i) Điểm $y_0 \in S$ được gọi là điểm hữu hiệu Pareto của S nếu $(S - y_0) \cap (-C) = \{0_Y\}$ [18,19]. Tập các điểm hữu hiệu Pareto của S được ký hiệu là $Min_C S$.

(ii) Điểm $y_0 \in S$ được gọi là điểm hữu hiệu theo nghĩa Benson của S nếu $clcone\,(S + C - y_0) \cap (-C) = \{0_Y\}$. Tập các điểm hữu hiệu theo nghĩa Benson của S được ký hiệu là $PrMin_C S$.

Nhận xét 2.2

(i) Với C là nón lồi trong Y, ta có $Min_C\ S = Min_C\ (S{+}C)$, $PrMin_C\ S = PrMin_C\ (S{+}C)$.

(ii) $\mathrm{Pr}Min_C S \subseteq \mathrm{Min}_S S$.

Ví dụ 2.3

Giả sử $Y = \mathbb{R}^2, C = \mathbb{R}^2_+$ và $S := \left\{(x,y) \in Y | x^2 + y^2 \leq 1\right\}$. Khi đó, ta có:

$\mathrm{Min}_C S = \left\{(x,y) \in Y | x^2 + y^2 = 1, x, y \leq 0\right\}$,

$\mathrm{PrMin}_C S = \left\{(x,y) \in Y | x^2 + y^2 = 1, x, y < 0\right\}$.

Do đó, $PrMin_C$ S là tập con thật sự của Min_C S.

Cho ánh xạ đa trị $F : X \to 2^Y$, miền hữu hiệu, miền ảnh và đồ thị của F được định nghĩa như sau:

$dom(F) := \{x \in X | F(x) \neq \varnothing\}$, $\mathrm{im}(F) := \{y \in Y | y \in F(X)\}$,

$gr(F) := \{(x,y) \in X \times Y | y \in F(x)\}$

Ánh xạ đa trị F được gọi là tĩnh quanh $x \in dom(F)$ (xem [18,20]) nếu tồn tại lân cận V của x, tồn tại $M > 0$ sao cho với mọi $x' \in V$,

$F(x') \subseteq F(x) + M\,\|x' - x\|\, B_y(0,1)$

where $B_y(0,1)$ is the closed unit ball is Y.

Định nghĩa 2.4

Cho $M \subseteq X, x \in cl(M)$, và $u_j \in X, i = 1, \ldots, m-1$ [18].

(i) Nón tiếp xúc cấp *1* của M tại x được xác định bởi $T^1(M,x) := \{u \in X | \exists t_n \to 0^+, \exists u_n \to u, x + t_n u_n \in M\}$.

(ii) Với $m \geq 2$, tập tiếp xúc cấp m của M tại x ứng với u_i được xác định bởi

$T^m(M, x, u_1, \ldots, u_{m-1}) := \{u \in X | \exists t_n \to 0^+,$
$\exists u_n \to u, x + t_n u_1 + \ldots t_n^{m-1} u_{m-1} + t_n^m u_n \in M\}$

Định nghĩa 2.5

Cho $F : X \to 2^Y, (x,y) \in gr(F)$, and $(u_i, v_i) \in X \times Y, i = 1, \ldots, m-1$ [18].

(i) Đạo hàm tiếp xúc cấp *1* của F tại (x,y) là ánh xạ đa trị $D^1F(x,y) : X \to 2^Y$ được định nghĩa như sau

$gr\left(D^1F(x,y)\right) := T^1(gr(F), (x,y))$

(ii) Với $m \geq 2$, đạo hàm tiếp xúc cấp m của F tại (x,y) ứng với (u_i, v_i) là ánh xạ đa trị $D^mF(x, y, u_1, v_1, \ldots, u_{m-1}, v_{m-1}) : X \to 2^Y$ được định nghĩa như sau

$\mathrm{gr}\left(D^mF(x, y, u_1, v_1, \ldots, u_{m-1}, v_{m-1})\right) := T^m\left(gr(F), (x,y), (u_1, v_1), \ldots, (u_{m-1}, v_{m-1})\right)$

Các khái niệm trong Định nghĩa 2.5 được viết lại tương đương như sau

$D^1F(x,y)(u) = \{v \in Y | \exists t_n \to 0^+, \exists (u_n, v_n) \to (u,v), y + t_n v_n \in F(x + t_n u_n)\}$

$D^mF(x, y, u_1, v_1, \ldots, u_{m-1}, v_{m-1})(u) = \{v \in Y | \exists t_n \to 0^+, \exists (u_n, v_n) \to (u,v)$
$y + t_n v_1 + \ldots + t_n^{m-1} v_{m-1} + t_n^m v_n \in F(x + t_n u_1 + \ldots + t_n^{m-1} u_{m-1} + t_n^m u_n)\}$

Định nghĩa 2.6

Cho ánh xạ đa trị $F : X \to 2^Y, (x_0, y_0) \in gr(F)$, và $v_1, \ldots, v_{m-1} \in Y$ [16,17].

(i) Tập biến phân cấp *1* của F tại (x_0 ,y_0) là tập

$V^1(F, x_0, y_0) := \{v \in Y | \exists t_n \to 0^+, \exists (x_n, v_n) \to (x_0, v), y_0 + t_n v_n \in F(x_n)\}$

(ii) Với $m \geq 2$, tập biến phân cấp m của F tại (x_0 ,y_0) ứng với $v_1, \ldots, v_{m-1}$ là tập

$V^m(F,\ x_0,\ y_0,\ v_1,\ \ldots,\ v_{m-1}) := \{v \in Y | \exists t_n \to 0^+,\ \exists (x_n,\ v_n) \to (x_0,\ v),\ y_0 + t_n v_1 + \ldots + t_n^{m-1} v_{m-1} + t_n^m v_n \in F(x_n)\}$

Nhận xét 2.7

(i) $V^1(F, x_0, y_0)$ là nón đóng, trong khi đó $V^m(F, x_0, y_0, v_1, \ldots, v_{m-1})$ là tập đóng với mọi $m \geq 2$ [16]

(ii) $V^m(F, x_0, y_0, 0, \ldots, 0) = V^1(F, x_0, y_0)$.

(iii) $D^mF(x_0, y_0, u_1, v_1, \ldots, u_{m-1}, v_{m-1})(X) \subseteq V^m(F, x_0, y_0, v_1, \ldots, v_{m-1})$.

(iv) Nếu một trong số các điều kiện sau $v_1 \notin V^1(F, x_0, y_0), \ldots, v_{m-1} \notin V^{m-1}(F, x_0, y_0, v_1, \ldots, v_{m-2})$ không thoả thì $V^m(F, x_0, y_0, v_1, \ldots, v_{m-1}) = \varnothing$.

Ví dụ 2.8

Giả sử $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2, F : X \to 2^Y$ được xác định bởi

$$F(x) := \begin{cases} (0,0), x = 0; \\ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), x = \frac{1}{n} \end{cases}$$

Với $(x_0, y_0) = (0, (0,0))$tính toán trực tiếp ta được:

$D^1(x_0, y_0)(u) = \begin{cases} (u,u), u \geq 0; \\ \varnothing, u < 0; \end{cases}$ $V^1(F, x_0, y_0) = \{(x,y) \in Y | x = y \geq 0\}$.

Định nghĩa 2.9

Cho ánh xạ đa trị $F : X \to 2^Y, (x_0, y_0) \in gr(F)$ và $v_1, \ldots, v_{m-1} \in Y$ [9].

(i) F được gọi là có tập nửa biến phân cấp *1* tại (x_0 ,y_0) nếu

$V^1(F,x_0,y_0) = \{v \in Y | \forall t_n \to 0^+, \forall x_n \to x_0, \exists v_n \to v,$
$y_0 + t_n v_n \in F(x_n)\}$

(ii) Với $m \geq 2$, F được gọi là có tập nửa biến phân cấp m tại (x_0 ,y_0) ứng với $v_1, ..., v_{m-1}$ nếu

$V^m(F,x_0,y_0,v_1,\ldots,v_{m-1}) = \{v \in Y | \forall t_n \to 0^+,$
$\forall x_n \to x_0, \exists v_n \to v, y_0 + t_n v_1 + \ldots + t_n^{m-1} v_{m-1}$
$+ t_n^m v_n \in F(x_n)\}$

Ví dụ 2.10

Giả sử $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2, F_i : X \to 2^Y, i = 1,2$ được xác định bởi

$$F_1(x) := \mathbb{R}^2_+, F_2(x) := \begin{cases} (0,0), x = 0 \\ (x,x), x = \frac{1}{n} \end{cases}$$

Tính toán trực tiếp ta được

+ Với F_1, (x_0 ,y_0) = *(0,0)* thì

$V^1(F_1,x_0,y_0) = \mathbb{R}^2_+$
$\{v \in Y | \forall t_n \to 0^+, \forall x_n \to x_0, \exists v_n \to v, y_0$
$+ t_n v_n \in F_1(x_n)\} = \mathbb{R}^2_+$

Do đó F_1 có tập nửa biến phân cấp *1* tại (x_0 ,y_0).

+ Với F_2, (x_0 ,y_0) = *(0,0)* thì

$V^1(F_1,x_0,y_0) = \{(x,y) \in Y | x = y \geq 0\}$
$\{v \in Y | \forall t_n \to 0^+, \forall x_n \to x_0, \exists v_n \to v, y_0$
$+ t_n v_n \in F_1(x_n)\} = \varnothing$

Do đó F_2 không có tập nửa biến phân cấp *1* tại (x_0 ,y_0).

TẬP BIẾN PHÂN CẤP CAO CỦA ÁNH XẠ NHIỄU THEO NGHĨA BENSON

Trong phần này, đầu tiên chúng tôi nhắc lại mối quan hệ giữa tập biến phân cấp cao của ánh xạ F và của ánh xạ prôfin *F+*, được định nghĩa bởi *(F+)(x):=F(x)* + C. Sau đó, chúng tôi thiết lập kết quả về tập biến phân cấp cao của ánh xạ nhiễu theo nghĩa Benson.

Định nghĩa 3.1

Tập con $S \subseteq Y$ được gọi là thoả tính chất C -trội nếu $S \subseteq \mathrm{Min}_C S + C$[1].

Mệnh đề 3.2

Cho $m \geq 2$, $F : X \to 2^Y, (x,y) \in gr(F)$ *và* $v_i \in Y, i = 1,\ldots m-1$[9] *. Khi đó*

$V^m(F,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1}) + C \subseteq V^m(F_+,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1})$

Mệnh đề 3.3

Cho $m \geq 2$, $F : X \to 2^Y, (x,y) \in gr(F)$ *and* $v_i \in Y, i = 1,\ldots,m-1$. *Giả sử C có cơ sở compact B. Khi đó,*

$\mathrm{Pr}\,\mathrm{Min}_C V^m(F_+,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1}) \subseteq V^m(F,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1})$

Chứng minh. Đây là hệ quả của Mệnh đề 3.2 trong[9] và Nhận xét 2.2 (ii).

Điều kiện C có cở sở compact không phải là điều cần theo ví dụ sau.

Ví dụ 3.4

Xét và $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2, C = (\mathrm{int}\mathbb{R}^2_+) \cup \{(0,0)\}$, và $F(x) := \{(y_1,y_2) \in Y | y_1 \geq 0, y_2 > -2y_1\} \cup \{(0,0)\}$

Khi đó $B = \{t(0,1) + (1-t)(1,0) | t \in (0,1)\}$ là một cơ sở của nón C, nhưng B không compact (vì B không đóng). Với (x, y) = (0, (0, 0)), v1 = (1, -2), tính toán trực tiếp ta được:

$V^2(F,x,y,v_1) = \{(y_1,y_2) \in Y | y_2 \geq -2y_1\}$
$V^2(F_+,x,y,v_1) = \{(y_1,y_2) \in Y | y_2 \geq -2y_1\}$
$\mathrm{Pr}\,\mathrm{Min}_C V^2(F_+,x,y,v_1) = \{(y_1,y_2) \in Y | y_2 = -2y_1\}$

Do đó $\mathrm{Pr}\,\mathrm{Min}_C V^2(F_+,x,y,v_1) \subseteq V^2(F,x,y,v_1)$

Mệnh đề 3.5

Cho $m \geq 2$ $F : X \to 2^Y, (x,y) \in gr(F)$,*and* $v_i \in Y, i = 1,\ldots,m-1$[9]. *Giả sử C có cơ sở compact B và* $V^m(F_+,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1})$*thoả tính chất C-trội. Khi đó,*

$V^m(F_+,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1}) = V^m(F,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1}) + C.$

Ví dụ sau đây thể hiện rằng giả thiết C -trội chỉ là điều kiện đủ.

Ví dụ 3.6

Xét $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2, C = \mathbb{R}^2_+$ và
$F(x) := \{(y_1,y_2) \in Y | y_1 + y_2 \geq 0\} \cup \{(y_1,y_2) \in Y | y_2 \geq 0\}, \forall x \in X$

Với $(x,y) = (0,(0,0)), v_1 = (1,0)$. Khi đó, tính toán trực tiếp ta được:

$V^2(F,x,y,v_1) = \{(y_1,y_2) \in Y | y_2 \geq 0\}$,
$V^2(F_+,x,y,v_1) = \{(y_1,y_2) \in Y | y_2 \geq 0\}$

Do đó, $V^2(F_+,x,y,v_1) = V^2(F,x,y,v_1) + C$. Tuy nhiên vì $\mathrm{Min}_C V^2(F_+,x,y,v_1) = \varnothing$ nên V2(F+,x,y,v1) không thoả tính chất C -trội.

Phần cuối của mục này, chúng tôi thành lập kết quả về tập biến phân cấp cao của ánh xạ nhiễu theo nghĩa Benson $S_B : W \to 2^Y$ được xác định bởi

$S_B(w) := \mathrm{Pr}\,Min_C H(w)$

trong đó H là ánh xạ đa trị đi từ không gian định chuẩn W vào không gian định chuẩn Y.

Định nghĩa 3.7

Ánh xạ H được gọi là C -minicomplete bởi S_B nếu với mọi $w \in domS_B$, ta có

$H(w) \subseteq S_B(w) + C$

Lưu ý rằng khái niệm C -trội được dùng cho tập, trong khi C -minicomplete được phát biểu cho ánh xạ. Hơn nữa, khái niệm nghiệm tối ưu trong hai định nghĩa trên cũng khác nhau.

Ví dụ 3.8

Xét $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2, C = \mathbb{R}^2_+, S := \{(y_1,y_2) \in Y : y_1 > 0, y_2 \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y_2) \in Y : y_2 \geq 0\}$ và $H(x) := \begin{cases} \{(0,0)\}, x = 0; \\ S, x \neq 0 \end{cases}$ Khi đó, tính toán trực tiếp ta được: $\text{Min}_C S = \{(0,0)\}$ và $S \subsetneq \text{Min}_C S + C$. Do đó tập S không thoả tính chất C -trội. Trong khi đó, $S_B(w) := \begin{cases} \{(0,0)\}, w = 0; \\ \varnothing, x \neq 0 \end{cases}$ và Định nghĩa 3.7 thoả cho H.

Mệnh đề 3.9

Cho $m \geq 2$, $(w,y) \in gr(S_B), v_i \in Y, i = 1,\ldots,m-1$ Nếu H là C-minicomplete bởi S_B *thì*

$V^m(H_+,w,y,v_1,\ldots,v_{m-1}) = V^m((S_B)_+,w,y,v_1,\ldots,v_{m-1})$

Chứng minh. Vì $S_B(w) \subseteq H(w)$ nên $(S_B)_+(w) \subseteq H_+(w)$. Theo giả thiết ta có $H(w) \subseteq S_B(w) + C$. Do đó, $H_+(w) \subseteq S_+(w)$, vậy $(S_B)_+(w) = H_+(w)$. Suy ra $V^m(H_+,w,y,v_1,\ldots,v_{m-1}) = V^m((S_B)_+,w,y,v_1,\ldots,v_{m-1})$.

Ví dụ sau đây nhấn mạnh vai trò của giả thiết C-minicomplete.

Ví dụ 3.10

Xét $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2, C = \mathbb{R}^2_+$, và $H(x) := \{(y_1,y_2) \in Y | y_1 \geq 0, y_2 > -y_1\} \cup \{(0,0)\}$

Khi đó $B = \{t(0,1) + (1-t)(1,0) | t \in [0,1]\}$ là một cơ sở compact của nón C. Với $(x,y) = (0,(0,0)), v_1 = (1,-1)$, tính toán trực tiếp ta được:

$S_B(x) = \{(0,0)\}, \forall x \in X$

$V^2(H_+,x,y,v_1) = \{(y_1,y_2) \in Y | y_2 \geq -y_1\}$

$V^2((S_B)_+,x,y,v_1) = \varnothing$

Vì $H(x) \subsetneq S_B(x) + C, \forall x \in X$, nên $V^2(H_+,x,y,v_1) \neq V^2((S_B)_+,x,y,v_1)$.

Định lý 3.11

Cho $m \geq 2$ $(w,y) \in gr(S_B), v_i \in Y, i = 1,\ldots,m-1$. Giả sử C có cơ sở compact B và các giả thiết sau đây thoả:

(i) H là C-minicomplete bởi S_B ;

(ii) $V^m(H_+,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1})$ *thoả tính C-trội.*

Khi đó,

$$\begin{aligned} &\text{Pr}\,\text{Min}_C V^m(H,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1}) \\ &\subseteq V^m(S_B,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1}) \end{aligned} \quad (1)$$

Chứng minh. Theo Mệnh đề 3.9, ta có: $V^m(H_+,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1}) = V^m((S_B)_+,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1})$.

Vậy $V^m((S_B)_+,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1})$ cũng thoả tính C-trội (giả thiết (ii)). Theo Mệnh đề 3.5, ta có:

$$V^m(H,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1}) + C = V^m(H_+,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1})$$

$$V^m(S_B,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1}) + C = V^m((S_B)_+,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1})$$

Do đó

$$\begin{aligned} \text{Pr}\,\text{Min}_C V^m(H,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1}) &\subseteq \text{Pr}\,\text{Min}_C V^m(H_+,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1}) \\ &\subseteq \text{Pr}\,\text{Min}_C V^m((S_B)_+,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1}) \\ &\subseteq V^m(S_B,x,y,v_1,\ldots,v_{m-1}) \end{aligned}$$

Với chiều ngược lại của (1), ta có kết quả sau đây.

Định lý 3.12

Cho $m \geq 2$, $(w,y) \in gr(S_B), v_i \in Y, i = 1,\ldots,m-1$. Giả sử các giả thiết sau đây thoả:

(i) H có tập nửa biến phân cấp m tại (x,y) ứng với $v_1,\ldots,v_{m-1}$

(ii) H là C-minicomplete bởi S_B ;

(iii) S_B *(w') chỉ chứa một điểm với mọi w' trong lân cận của w.*

Khi đó,

$$V^m(S_B,w,y,v_1,\ldots,v_{m-1}) \subseteq \text{Pr}\,\text{Min}_C V^m(H,w,y,v_1,\ldots,v_{m-1})$$

Chứng minh. Lấy $v \in V^m(S_B,w,y,v_1,\ldots,v_{m-1}) \subseteq V^m(H,w,y,v_1,\ldots,v_{m-1})$. Khi đó, tồn tại $t_n \to 0^+, (w_n,v_n) \to (w,v)$ sao cho

$$y + t_n v_1 + \ldots + t_n^{m-1} v_{m-1} + t_n^m v_n \in S_B(w_n) \subseteq H(w_n) \quad (2)$$

Giả sử $v \notin \text{Pr}\,\text{Min}_C V^m(H,w,y,v_1,\ldots,v_{m-1})$, khi đó tồn tại $t_k > 0, c_k \in C, \overline{v_k} \in V^m(H,w,y,v_1,\ldots,v_{m-1})$ sao cho

$$\lim_{k\to\infty} t_k(\overline{v_k} + c_k - v) \in -C \setminus \{0_Y\} \quad (3)$$

Theo giả thiết (i), với t_n, w_n như trên tồn tại $\overline{v_{k_n}} \to \overline{v_k}$ sao cho

$$y + t_n v_1 + \ldots + t_n^{m-1} v_{m-1} + t_n^m \overline{v_{k_n}} \in H(w_n) \quad (4)$$

Từ giả thiết (ii), (iii) và (2), (4), ta có $\overline{v_{k_n}} - v_n \in C$. Vì C là nón đóng nên suy ra $\overline{v_k} - v \in C$, do đó

$$\lim_{k\to\infty} t_k(\overline{v_k} + c_k - v) \in C$$

mâu thuẫn (3). Vậy $v \in \text{Pr}\,Min_C V^m(H,w,y,v_1,\ldots,v_{m-1})$.

Hệ quả 3.13

Cho $m \geq 2$ $(w,y) \in gr(S_B), v_i \in Y, i = 1,\ldots,m-1$

Giả sử các giả thiết của Định lý 3.11 và 3.12 đều thoả. Khi đó, ta có

$V^m(S_B,w,y,v_1,\ldots,v_{m-1}) = \text{Pr}\,\text{Min}_C V^m(H,w,y,v_1,\ldots,v_{m-1})$

Ví dụ sau đây minh hoạ cho Hệ quả 3.13.

Ví dụ 3.14

Xét $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2, C = \mathbb{R}^2_+$, và $H(x) := \{(y_1,y_2) \in Y | y_1 + y_2 \geq x\}$ nếu $x \geq 0$. Với $(x,y) = (0,(0,0)), v_1 = (1,-1)$, ta có thể kiểm tra các giả thiết của Hệ quả 3.13. Ngoài ra, tính toán trực tiếp ta được:

$S_B(x) = \{(y_1,y_2) \in Y | y_1 + y_2 = x\}, \forall x \in X$

$V^2(H,x,y,v_1) = \{(y_1,y_2) \in Y | y_1 + y_2 \geq 0\}$

$\text{PrMin}_C V^2(H,x,y,v_1) = \{(y_1,y_2) \in Y | y_1 + y_2 = 0\}$

$V^2(S_B,x,y,v_1) = \{(y_1,y_2) \in Y | y_1 + y_2 = 0\}$

Do đó, $V^2(S_B,w,y,v_1) = \text{Pr}\,\text{Min}_C V^2(H,w,y,v_1)$.

ÁP DỤNG VÀO PHÂN TÍCH ĐỘ NHẠY

Xét bài toán tối ưu đa trị tham số *(P)* như sau

$$\mathrm{Pr\,Min}_C F(x,w) \quad \text{s.t.} \quad x \in G(w)$$

trong đó $F : X \times W \to 2^Y, G : W \to 2^X$, x là biến quyết định, w là tham số. Định nghĩa ánh xạ tập giá trị chấp nhận được trong không không gian mục tiêu $H : W \to 2^Y$ như sau

$H(w) := \{y \in Y | y \in F(x,w), x \in G(w)\}$

Từ bài toán *(P)*, chúng tôi xây dựng ánh xạ nhiễu theo nghĩa Benson $S_B : W \to 2^Y$ như sau

$S_B(w) := \mathrm{Pr\,Min}_C H(w)$

Trong phần này, chúng tôi sẽ thiết lập quan hệ về tập biến phân cấp cao của S_B và của các ánh xạ *F, G*.

Định nghĩa 4.1

Cho $m \geq 2$, $F : X \times W \to 2^Y, ((x,w),y) \in gr(F), (u_i,v_i) \in X \times Y, i = 1,\ldots,m-1$ [9].

(i) Tập biến phân trên cấp m của F tại *((x,w),y)* ứng với $x' \in X$ là tập

$\bar{V}_q^m(F,(x[x'],w),y,u_1,v_1,\ldots,u_{m-1},v_{m-1}) := \{v \in Y | \exists t_n \to 0^+, \exists h_n \to 0^+,$
$\exists x_n \to x', \exists w_n \to w, \exists v_n \to v y + h_n v_1 + \ldots + h_n^{m-1} v_{m-1}$
$+ h_n^m v_n \in F\left(x + t_n u_1 + \ldots + t_n^{m-1} u_{m-1} + t_n^m x_n, w_n\right)\}$

(ii) Tập biến phân dưới cấp m của F tại *((x,w),y)* ứng với $x' \in X$ là tập

$\underline{V}_q^m(F,(x[x'],w),y,u_1,v_1,\ldots,u_{m-1},v_{m-1}) := \{v \in Y | \forall t_n \to 0^+, \forall x_n \to x',$
$\forall w_n \to w, \exists v_n \to v y + t_n v_1 + \ldots + t_n^{m-1} v_{m-1} + t_n^m v_n$
$\in F\left(x + t_n u_1 + \ldots + t_n^{m-1} u_{m-1} + t_n^m x_n, w_n\right)\}$

(iii) F được gọi là có tính chất tiền biến phân tại *((x,w),y)* ứng với $x' \in X$ nếu

$\bar{V}_q^m(F,(x[x'],w),y,u_1,v_1,\ldots,u_{m-1},v_{m-1}) = \underline{V}_q^m(F,(x[x'],w),y,u_1,v_1,\ldots,u_{m-1},v_{m-1})$

Mệnh đề 4.2

Cho $m \geq 2$, $w \in W, x \in G(w), y \in F(x,u)$ và $(u_i,v_i) \in X \times Y, i = 1,\ldots,m-1$ [9]. Nếu F có tính chất tiền biến phân tại ((x,w),y) ứng với $x' \in X$ thì

$$\bigcup_{x' \in V^m(X,w,x,u_1,\ldots,u_m)} \bar{V}_q^m(F,(x[x'],w),y,u_1,v_1,\ldots,u_{m-1},v_{m-1}) \subseteq V^m(H,w,y,v_1,\ldots,v_{m-1}) \quad (5)$$

Hơn nữa nếu X là không gian hữu hạn chiều, $\widetilde{G}(w',y') := \{x' \in X | x' \in G(w'), y' \in F(x',w')\}$ là tĩnh quanh (w,y), $\widetilde{G}(w,y) = \{x\}$ và $\bar{V}_q^1(\widetilde{G},(w,y[0]),x) = \{0\}$, thì bao hàm (5) thoả chiều ngược lại.

Các giả thiết trong Mệnh đề 4.2 là cần thiết, xem Ví dụ 5.1-5.4 trong [9].

Định lý 4.3

Cho $m \geq 2$, $(w,y) \in gr(S_B), x \in G(w), y \in F(x,w), (u_i,v_i) \in X \times Y, i = 1,\ldots,m-1$. X là không gian hữu hạn chiều và C có cơ sở compact B. Giả sử các điều kiện sau đây thoả:

(i) *H là C-minicomplete bởi S_B*;

(ii) $V^m(H_+,w,y,v_1,\ldots,v_{m-1})$ *thoả tính C-trội;*

(iii) *F có tính chất tiền biến phân tại ((x,w),y) ứng với $x' \in X$.*

(iv) *$\tilde{G}$ là tĩnh quanh (w,y);*

(v) $\widetilde{G}(w,y) = \{x\}$ *và* $V_Q(\widetilde{G}((w,y[0]),x)^{-1} = \{0\}$.

Khi đó, ta có

$$\mathrm{Pr\,Min}_C\left(\bigcup_{x' \in V^m(G,w,x_1,\ldots,u_{m-1})} \bar{V}_q^m(F,(x[x'],w),y,u_1,v_1,\ldots,u_{m-1},v_{m-1})\right) = \mathrm{Pr\,Min}_C(V^m(S_B,w,y,v_1,\ldots,v_{m-1}))$$

Chứng minh. Theo Mệnh đề 3.9 và giả thiết (ii), ta có $\mathrm{Pr}\,Min_C(V^m(H,w,y,v_1,\ldots,v_{m-1})) = \mathrm{Pr\,Min}_C(V^m(S_B,w,y,v_1,\ldots,v_{m-1}))$.

Theo Mệnh đề 4.2, ta suy ra điều phải chứng minh.

Định lý 4.4

Giả sử các giả thiết của Định lý 4.3 và H có tập nửa biến phân cấp m tại (w,y) ứng với $v_1,\ldots,v_{m-1}$. Khi đó, ta có

$$\mathrm{Pr\,Min}_C\left(\bigcup_{x' \in V''(G,w,x,u_1,\ldots,u_{m-1})} \bar{V}_q^m(F,(x[x'],w),y,u_1,v_1,\ldots,u_{m-1},v_{m-1}\right) = V^m(S_B,w,y,v_1,\ldots,v_{m-1})$$

Chứng minh. Áp dụng Hệ quả 3.13 và Mệnh đề 4.2, ta suy ra điều phải chứng minh.

Trong bài báo [9], kết quả về phân tích độ nhạy cho bài toán *(P)* được trình bày cho khái niệm nghiệm hữu hiệu yếu (Mệnh đề 4.1, Định lý 5.3 trong [9]). Kết quả cho nghiệm hữu hiệu Pareto không thể suy ra với điều kiện tương tự. Với kết quả trong bài báo này, chúng ta có thể đạt được kết luận về phân tích độ nhạy (tương tự Mệnh đề 4.1, Định lý 5.3 trong [9]) ứng với nghiệm hữu hiệu Pareto.

KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một số kết quả về phân tích độ nhạy trong tối ưu đa trị. Cụ thể, chúng tôi dùng tập biến phân cấp cao, một khái niệm đạo hàm suy rộng, là công cụ chính. Đầu tiên, mối quan hệ giữa tập biến phân cấp cao của ánh xạ đa trị và ánh xạ prôfin của nó được nhắc lại. Tiếp theo đó, chúng tôi thiết lập kết quả về tập biến phân cấp cao của ánh xạ nhiễu theo nghĩa Benson. Với áp dụng của kết quả này, chúng tôi đạt được sự phân tích độ nhạy cho bài toán tối ưu đa trị tham số.

DANH MỤC TỪ VIẾT TẮT

cl(S): bao đóng của tập S
cone: nón sinh bởi tập B
$\mathrm{Min}_C S$: tập các điểm hữu hiệu Parero của tập S
$\mathrm{PrMin}_C S$: tập các điểm hữu hiệu theo nghĩa Benson của tập S
domF: miền hữu hiệu của ánh xạ đa trị F
imF: miền giá trị của ánh xạ đa trị F
grF: đồ thị của ánh xạ đa trị F
F+: ánh xạ profin của ánh xạ đa trị F

XUNG ĐỘT LỢI ÍCH

Tác giả xin cam kết không xung đột và mâu thuẫn về lợi ích ấn phẩm khoa học.

ĐÓNG GÓP CỦA TÁC GIẢ

Đây là ấn phẩm khoa học mà tác giả đứng tên một mình.

LỜI CẢM ƠN

Bài báo này được tài trợ bởi Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh (ĐHQG-HCM) trong khuôn khổ đề tài mã số C2019-26-03. Tác giả xin cảm ơn phản biện đã có những nhận xét hữu ích giúp hoàn thiện bài báo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Tanino T. Sensitivity analysis in multiobjective optimization. Journal of Optimization Theory and Applications. 1988;56:479–499.
2. Tanino T. Stability and sensitivity analysis in convex vector optimization. SIAM Journal of Control Optimization. 1988;26:521–536.
3. Shi DS. Contingent derivative of the perturbation map in multiobjective optimization. Journal of Optimization Theory and Applications. 1991;70:385–396.
4. Shi DS. Sensitivity analysis in convex vector optimization. Journal of Optimization Theory and Applications. 1993;77:145–159.
5. Kuh H, Tanino T, Tanaka M. Sensitivity analsysis in parametrized convex vector optimization. Journal of Mathematical Analsysis and Applications. 1996;202:511–522.
6. Kuh H, Tanino T, Tanaka M. Sensitivity analsysis in vector optimization. Journal of Optimization Theory and Applications. 1996;89:713–730.
7. Anh NLH. Some results on sensitivity analysis in set-valued optimization. Positivity. 2017;21:1527–1543.
8. Anh NLH. Sensitivity analysis in constrained set-valued optimization via Studniarski derivatives. Positivity. 2017;21:255–272.
9. Anh NLH, Khanh PQ. Variational Sets of Perturbation Maps and Applications to Sensitivity Analysis for Constrained Vector Optimization. Journal of Optimization Theory and Applications. 2013;158:363–384.
10. Wang QL, Li SJ. Sensitivity and stability for the second-order contingent derivative of the proper perturbation map in vector optimization. Optimization Letter. 2012;6:731–748.
11. Xu YH, Peng ZH. Higher-order sensitivity analysis in set-valued optimization under Henig efficiency. Journal of Industrial and Management Optimization. 2017;13:313–327.
12. Anh NLH. Higher-order optimality conditions in set-valued optimization using Studniarski derivatives and applications to duality. Positivity. 2014;18:449–473.
13. Anh NLH. Higher-order optimality conditions for set-valued optimization with ordering cones having empty interior using variational sets. Positivity. 2016;20:41–60.
14. Anh NLH, Khanh PQ. Higher-order optimality conditions for proper efficiency in nonsmooth vector optimization using radial sets and radial derivatives. Journal of Global Optimization. 2014;58:693–709.
15. Anh NLH, Khanh PQ, Tung LT. Higher-order radial derivatives and optimality conditions in nonsmooth vector optimization. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2011;74:7365–7379.
16. Khanh PQ, Tuan ND. Variational sets of multivalued mappings and a unified study of optimality conditions. Journal of Optimization Theory and Applications. 2008;139:45–67.
17. Khanh PQ, Tuan ND. Higher-order variational sets and higher-order optimality conditions for proper efficiency in set-valued nonsmooth vector optimization. Journal of Optimization Theory and Applications. 2008;139:243–261.
18. Aubin JP, Frankowska H. Set-Valued Analysis. Birkhauser; 1990.
19. Benson HP. An improved definition of proper efficiency for vetor maximization with respect to cones. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1979;71:232–241.
20. Rockafellar RT, Wets RJB. Variational Analysis. Springer; 2009. 3rd edn.

Science & Technology Development Journal – Natural Sciences, 3(4):279-285

Open Access Full Text Article

Research Article

Higher-order variational set of the benson proper perturbation map in set-valued optimization

Ha Manh Linh*

ABSTRACT

In the paper, we study sensitivity analysis in set-valued optimization; a research direction has been attracting much attention of many mathematicians in the world recently. The main derivative used in the paper is a higher-order variational set (introduced by Khanh and Tuan in 2008), which is considered as a generalization of the contingent derivative (known as the first and the most popular derivative in set-valued optimization). Firstly, we establish relationships between higher-order variational sets of a given set-valued map and those of its profile (extended by an ordering cone). Then, we give results on a higher-order variational set of the Benson proper perturbation map for a kind of set-valued optimization problem; the perturbation map is defined in the objective space. Finally, we apply the obtained results to sensitivity analysis for an optimal-value map of a parametrized constrained set-valued optimization problem whose the objective map and constrained maps depends on some parameter. More precisely, some results on sensitivity analysis for parametrized constrained set-valued optimization problem are obtained. The content of the paper gives us more applications of higher-order variational set in set-valued optimization.

Key words: Higher-order variational set, Benson proper perturbation map, set-valued map, sensitivity analysis

University of Information Technology, VNU-HCM

Correspondence

Ha Manh Linh, University of Information Technology, VNU-HCM

Email: linhhm@uit.edu.vn

History

- Received: 03-11-2019
- Accepted: 17-10-2019
- Published: 25-12-2019

DOI : 10.32508/stdjns.v3i4.696

Check for updates

Cite this article : Manh Linh H. **Higher-order variational set of the benson proper perturbation map in set-valued optimization** . *Sci. Tech. Dev. J. - Nat. Sci.;* 3(4):279-285.