Tạp chí Phát triển Khoa học và Công nghệ – Khoa học Tự nhiên, 4(3):567-572

Open Access Full Text Article

Bài Nghiên cứu

Đạo hàm theo tia cấp hai dạng hợp của ánh xạ nhiễu trong tối ưu đa trị

Phạm Lê Bạch Ngọc[*], Nguyễn Thanh Tùng, Nguyễn Huỳnh Nghĩa

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu về tính khả vi suy rộng trong tối ưu đa trị, cụ thể là nghiên cứu về đạo hàm theo tia cấp hai dạng hợp của một ánh xạ đa trị cho trước. Xuất phát từ ý tưởng nón kề và mở rộng định nghĩa nón theo tia cấp cao trong nghiên cứu của nhóm tác giả Anh NLH và cộng sự (2011), chúng tôi giới thiệu đạo hàm theo tia dạng hợp cấp hai. Tiếp theo đó, một số tính chất của khái niệm này được tìm hiểu và mối liên quan giữa đạo hàm theo tia cấp hai dạng hợp của một ánh xạ đa trị cho trước và ánh xạ đa trị kéo dài của nó được thiết lập. Sau đó, áp dụng của đạo hàm theo tia cấp hai dạng hợp trong phân tích độ nhạy được trình bày. Cụ thể, chúng tôi nghiên cứu về bài toán tối ưu đa trị tham số hoá. Dạng nghiệm được đề cập đến trong bài là nghiệm Pareto. Dựa vào các kết quả bên trên, chúng tôi tìm hiểu về phân tích độ nhạy cho ánh xạ nghiệm Pareto của bài toán này. Một cách rõ ràng hơn, chúng tôi thiết lập đạo hàm theo tia cấp hai dạng hợp của ánh xạ nghiệm Pareto nhiễu (ánh xạ nhiễu được hiểu theo nghĩa là ánh xạ nghiệm Pareto và phụ thuộc vào tham số nhiễu nào đó). Một số ví dụ được thiết lập để minh hoạ cho các kết quả của chúng tôi. Kết quả đạt được trong bài báo này là mới và cải thiện hơn so với một số kết quả đã có trong hướng nghiên cứu này.

Từ khoá: đạo hàm theo tia cấp hai dạng hợp, ánh xạ nhiễu, phân tích độ nhạy, tối ưu đa trị tham số

Khoa Sư phạm và Xã hội Nhân văn, Trường Đại học Kiên Giang, Kiên Giang, Việt Nam

Liên hệ

Phạm Lê Bạch Ngọc, Khoa Sư phạm và Xã hội Nhân văn, Trường Đại học Kiên Giang, Kiên Giang, Việt Nam

Email: plbngoc0611@gmail.com

Lịch sử

- Ngày nhận: 03-09-2019
- Ngày chấp nhận: 08-12-2019
- Ngày đăng: 01-7-2020

DOI : 10.32508/stdjns.v4i3.838

GIỚI THIỆU

Phân tích sự ổn định và phân tích độ nhạy đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết tối ưu. Phân tích sự ổn định nghĩa là nghiên cứu về tính liên tục của ánh xạ nghiệm/ánh xạ giá trị tối ưu của bài toán tối ưu tham số. Trong khi đó, với phân tích độ nhạy, chúng ta thiết lập sự xấp xỉ của các ánh xạ bên trên thông qua các dạng đạo hàm.

Một số kết quả về phân tích độ nhạy trong tối ưu vectơ có thể được tham khảo tại các nghiên cứu của Kuh H *et al.* (1996) [1, 2], Shi DS (1991) [3], Shi DS (1993) [4], Tanino T (1988) [5, 6]. Trong nghiên cứu của Tanino T (1998) [5], Tanino thiết lập kết quả về phân tích độ nhạy trong tối ưu véctơ dùng đạo hàm tiếp xúc (xem Aubin JP và Frankowwka (1990) [7]). Với các giả thiết nhẹ hơn so với Tanino T (1998) [5], Shi đã giới thiệu đạo hàm TP trong Shi DS (1991) [3] và sau đó xây dựng tính chất nhạy được xem là sự mở rộng của Tanino. Năm 1996, Kuk và các đồng nghiệp để xuất hướng phát triển khác từ kết quả của Tanino [1, 2].

Khi nghiên cứu về phân tích độ nhạy, khái niệm đạo hàm đóng vai trò quan trọng. Một số kết quả về đạo hàm suy rộng cấp hai và cấp cao đang được phát triển gần đây [8–15]. Wang và Li đạt được kết quả về phân tích độ nhạy cấp cao trong tối ưu véctơ không lồi [16]. Sau đó, nhóm tác giả này mở rộng kết quả cho ánh xạ nhiễu proper dùng đạo hàm tiếp xúc cấp hai [17]. Vào năm 2017, Xu và Peng dùng đạo hàm tiếp xúc cấp cao thiết lập kết quả về phân tích độ nhạy cho ánh xạ nhiễu proper theo kiểu Henig [18].

Xuất phát từ ý tưởng của các kết quả nghiên cứu trước đây [9, 11, 13, 17, 18], trong bài báo này chúng tôi dùng đạo hàm theo tia cấp hai dạng hợp trong phân tích độ nhạy. Cụ thể, dùng đạo hàm này, chúng tôi thành lập mối quan hệ giữa đạo hàm theo tia cấp hai dạng hợp của ánh xạ F và của ánh xạ $F+C$. Sau đó, chúng tôi trình bày kết quả về phân tích độ nhạy cấp hai cho bài toán tối ưu đa trị tham số.

MỞ ĐẦU

Trong bài báo này, chúng tôi giả sử X, Y là các không gian định chuẩn, C là nón lồi đóng có đỉnh trong không gian Y. Ký hiệu 0_X là điểm gốc của không gian X. Cho M là tập con khác rỗng của Y, khi đó $\mathrm{cl}(M)$ là bao đóng của tập M. Nón sinh bởi tập M được xác định bởi

$$\mathrm{cone}(M) := \{ty | t \geq 0,\ y \in M\}$$

Tập lồi khác rỗng B được gọi là cơ sở của nón C nếu $0_Y \notin \mathrm{cl}(B)$ và $\mathrm{cone}\,(B) = C$.

Trích dẫn bài báo này: Ngọc P L B, Tùng N T, Nghĩa N H. **Đạo hàm theo tia cấp hai dạng hợp của ánh xạ nhiễu trong tối ưu đa trị**. *Sci. Tech. Dev. J. - Nat. Sci.;* 4(3):567-572.

Điểm $y_0 \in M$ được gọi là điểm hữu hiệu Pareto của M nếu $(M-y_0)\cap(-C)=\{0_Y\}$. Tập các điểm hữu hiệu pareto của M được ký hiệu là $\mathrm{Min}_c M$.

Nhận xét 2.1. Với C là nón lồi đóng trong Y, ta có $\mathrm{Min}_c M$=$\mathrm{Min}_c(M+C)$.

Cho ánh xạ đa trị $F: X \to 2^Y$, miền hữu hiệu, miền ảnh và đồ thị của được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(F) &:= \{x \in X | F(x) \neq \varnothing\}, \\ \mathrm{im}(F) &:= \{y \in Y | y \in F(X)\}, \\ \mathrm{gr}(F) &:= \{(x,y) \in X \times Y | y \in F(x)\}. \end{aligned}$$

Định nghĩa 2.1 ([7, 19]). Cho $S \subseteq X$, $x \in \mathrm{cl}(S)$.

- Nón tiếp xúc của S tại x được xác định bởi

$$T(S,x) := \left\{u \in X | \exists t_n \to 0^+, \exists u_n \to u, x+t_n u_n \in S\right\}.$$

- Nón theo tia của S tại x được xác định bởi

$$R(S,x) := \{u \in X | \exists t_n > 0, \exists u_n \to u, x+t_n u_n \in S\}.$$

Nhận xét 2.2. ([7, 20]) (i) $T(S,x)$, $R(S,x)$ là các nón đóng.

(i) $T(S,x) \subseteq R(S,x)$.

(ii) $R(S,x) = \mathrm{clcone}(S-x)$.

(iii) Nếu S lồi thì $T(S,x)$, $R(S,x)$ là lồi và

$$T(S,x) = R(S,x) = \mathrm{clcone}(S-x).$$

(iv) $R(R(S,x),0) = R(S,x)$.

(v) Với $u \in R(S,x)$, ta có

$$R(R(S,x),0) = \mathrm{clcone}(\mathrm{cone}(S-x)-u).$$

Dựa vào ý tưởng của nón kề ([7]) và nón theo tia trong ([13]) chúng tôi đề xuất định nghĩa sau.

Định nghĩa 2.2. (i) Cho $S \subseteq X$, $x \in \mathrm{cl}(S)$. Nón theo tia dưới của S tại x được xác định bởi

$$R_l(S,x) := \{u \in X | \forall t_n > 0, \exists u_n \to u, x+t_n u_n \in S\}.$$

(ii) Cho $S \subseteq X \times Y$, $(x,y) \in \mathrm{cl}(S)$. Nón theo tia dưới suy biến của S tại x được xác định bởi

$$\begin{aligned} R_{ls}(S,x) := \{&(u,v) \in X \times Y | \exists t_n > 0, \forall u_n \to u, \\ &\exists v_n \to v, (x+t_n u_n, y+t_n v_n) \in S\}. \end{aligned}$$

ĐẠO HÀM THEO TIA CẤP HAI DẠNG HỢP CỦA ÁNH XẠ ĐA TRỊ

Trong phần này, chúng tôi thiết lập mối quan hệ giữa đạo hàm theo tia cấp hai dạng hợp của ánh xạ F và của ánh xạ F+C, được định nghĩa bởi $(F+C)(x) := F(x)+C$.

Định nghĩa 3.1. Cho $F: X \to 2^Y$, $(x,y) \in \mathrm{gr}(F)$ và $(u,v) \in X \times Y$.

(i) Đạo hàm theo tia cấp hai dạng hợp của F tại (x,y) ứng với (u,v) là ánh xạ đa trị $D^2_{cr}F(x,y,u,v): X \to 2^Y$ được định nghĩa như sau

$$gr(D^2_{cr}F(x,y,u,v,)) := R(R(gr(F),(x,y)), (u,v)).$$

(ii) Đạo hàm theo tia dạng hợp dưới suy biến cấp hai của F tại (x,y) ứng với (u,v) là ánh xạ đa trị $D^2_{ls}F(x,y,u,v): X \to 2^Y$ được định nghĩa như sau

$$gr(D^2_{ls}F(x,y,u,v,)) := R_{ls}(R_{ls}(gr(F),(x,y)), (u,v)).$$

(iii) Ánh xạ F được gọi là có nửa đạo hàm theo tia cấp hai dạng hợp tại (x,y) ứng với (u,v) nếu

$$D^2_{cr}F(x,y,u,v)(x') = D^2_{ls}F(x,y,u,v)(x').$$

Định nghĩa 3.2. ([11]) Tập con $S \subseteq Y$ được gọi là thoả tính chất C-trội nếu $S \subseteq \mathrm{Min}_C S + C$.

Mệnh đề 3.1. *Cho $F: X \to 2^Y$, $(x,y) \in \mathrm{gr}(F)$ và $(u,v) \in X \times Y$.Khi đó,*

$$D^2_{cr}F(x,y,u,v)(x') + C \subseteq D^2_{cr}(F+C)(x,y,u,v)(x').$$

Chứng minh. Lấy $w \in D^2_{cr}F(x,y,u,v)(x')$ và $c \in C$. Khi đó, tồn tại $t_n > 0$, $(x_n,w_n) \to (x',w)$ sao cho

$$(u,v)+t_n(x_n,w_n) \in R(grF, (x,y)).$$

Theo định nghĩa của nón theo tia, với mỗi n, tồn tại $t^k_n > 0$, $(x^k_n, w^k_n) \to (u,v)+t_n(x_n, w_n)$ sao cho

$$(x,y)+t^k_n(x^k_n w^k_n) \in gr(F).$$

Vì $c \in C$, $t_n > 0$ nên ta có

$$(x,y)+t^k_n(x^k_n, w^k_n+t_n c) \in \mathrm{gr}(F+C).$$

Dễ thấy $(x^k_n, w^k_n+t_n c) \to (u,v)+t_n(x_n, w_n+c)$ khi $k \to \infty$, do đó

$$(u,v)+t_n(x_n, w_n+c) \in R(\mathrm{gr}(F+C), (x,y)). \square$$

Hơn nữa vì $(x_n, w_n+c) \to (x', w+c)$ khi $n \to \infty$ nên $(x', w+c) \in R(R(gr(F+C), (x,y)), (u,v))$, tức là, $w+c \in D^2_{cr}(F+C)(x,y,u,v)(x')$.

Mệnh đề 3.2. *Cho $F: X \to 2^Y$, $(x,y) \in \mathrm{gr}(F)$ và $(u,v) \in X \times Y$.Giả sử C có cơ sở compact B. Khi đó,*

$$\mathrm{Min}_C D^2_{cr}(F+C)(x,y,u,v)(x') \subseteq D^2_{cr}F(x,y,u,v)(x').$$

Chứng minh. Lấy $w \in \mathrm{Min}_C D^2_{cr}(F+C)(x,y,u,v)(x')$, suy ra $w \in D^2_{cr}(F+C)(x,y,u,v)(x')$. Khi đó, tồn tại $t_n > 0$, $(x_n, w_n) \to (x', w)$ sao cho

$$(u,v) + t_n(x_n,\ w_n) \in R(\mathrm{gr}(F+C),\ (x,y)).$$

Theo định nghĩa của nón theo tia, với mỗi n, tồn tại $t_n^k > 0$, $(x_n^k,\ w_n^k) \to (u,v) + t_n(x_n,\ w_n)$ sao cho

$$(x,\ y) + t_n^k(x_n^k,\ w_n^k) \in \mathrm{gr}(F+C).$$

Khi đó tồn tại dãy $c_k \in C$ sao cho

$$y + t_n^k\left(w_n^k - \frac{1}{t_n^k}c_k\right) \in F(x + t_n^k x_n^k). \qquad (1)$$

Vì nón C có cơ sở compact B nên tồn tại $\alpha_k > 0$, $b_k \in B$ ($b_k \to b \in B$) sao cho $c_k := \alpha_k b_k$. Từ (1) ta có

$$y + t_n^k\left(w_n^k - \frac{\alpha_k}{t_n^k}b_k\right) \in F(x + t_n^k x_n^k). \qquad (2)$$

Ta chứng minh rằng $\frac{\alpha_k}{t_n t_n^k} \to 0$ khi $k \to \infty$. Giả sử ngược lại, tồn tại $\varepsilon < 0$ sao cho $\frac{\alpha_k}{t_n t_n^k} \geq \varepsilon$, $\forall k$, từ (2) ta suy ra

$$\begin{aligned}
&y + t_n^k(w_n^k - \varepsilon t_n b_k) = \\
&y + t_n^k\left(w_n^k - \tfrac{\alpha_k}{t_n^k}b_k\right) + (\alpha_k b_k - \varepsilon t_n t_n^k b_k) \\
&= y + t_n^k\left(w_n^k - \tfrac{\alpha_k}{t_n^k}b_k\right) + t_n t_n^k b_k\left(\tfrac{\alpha_k}{t_n t_n^k} - \varepsilon\right) \\
&\in (F+C)(x + t_n^k x_n^k).
\end{aligned}$$

Vì $w_n^k \to v + t_n w_n$, $b_k \to b$ khi $k \to \infty$ nên $w_n^k - \varepsilon t_n b_k \to v + t_n w_n - \varepsilon t_n b (k \to \infty)$. Mặt khác, do $x_n^k \to u + t_n x_n$ khi $k \to \infty$ nên

$$(u,v) + t_n(x_n, w_n - \varepsilon b) \in \mathrm{gr}((F+C),\ (x,y)).$$

Ngoài ra, ta có $(x_n,\ w_n - \varepsilon b) \to (x',\ w - \varepsilon b)$ khi $n \to \infty$ nên

$$(x',\ w - \varepsilon b) \in R(R(\mathrm{gr}(F+C),\ (x,\ y)),\ (u,\ v)),$$

tức là, $w - \varepsilon b \in D^2_{cr}(F+C)(x,y,u,v)(x')$, mâu thuẫn với tính chất $w \in \mathrm{Min}_C D^2_{cr}(F+C)(x,y,u,v)(x')$. Vậy $\frac{\alpha_k}{t_n t_n^k} \to 0$ khi $k \to \infty$, suy ra $\frac{\alpha_k}{t_n^k} \to 0$ khi $k \to \infty$.
Vì $(x_n^k,\ w_n^k) \to (u,v) + t_n(x_n, w_n)$ nên

$$\left(x_n^k,\ w_n^k - \frac{\alpha_k}{t_n^k}b_k\right) \to (u,v) + t_n(x_n, w_n).$$

Từ (2), ta có

$$(u,v) + t_n(x_n,\ w_n) \in R(\mathrm{gr}F,\ (x,y)).$$

Hơn nữa vì $(x_n,\ w_n) \to (x',\ w)$ khi $n \to \infty$ nên $(x',\ w) \in R(R(\mathrm{gr}F,\ (x,\ y)),\ (u,\ v))$, tức là,

$$w \in D^2_{cr}(F)(x,y,u,v)(x'). \ \square$$

Mệnh đề 3.3. *Cho $F : X \to 2^Y$, $(x,\ y) \in \mathrm{gr}(F)$ và $(u,\ v) \in X \times Y$ Giả sử C có cơ sở compact B và $D^2_{cr}(F+C)(x,y,u,v)(x')$ thoả tính chất C-trội với mọi x. Khi đó,*

$$D^2_{cr}F(x,y,u,v)(x') + C = D^2_{cr}(F+C)(x,y,u,v)(x')$$

Chứng minh. Theo Mệnh đề 3.1, ta chỉ cần chứng minh

$$D^2_{cr}F(x,y,u,v)(x') + C \supseteq D^2_{cr}(F+C)(x,y,u,v)(x').$$

Thật vậy, vì $D^2_{cr}(F+C)(x,y,u,v)(x')$ thoả tính chất C-trội với mọi x nên

$$\begin{aligned}
&D^2_{cr}(F+C)(x,y,u,v)(x') \\
&\subseteq \mathrm{Min}_C \mathrm{D}^2_{\mathrm{cr}}(\mathrm{F}+\mathrm{C})(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{u},\mathrm{v})(\mathrm{x}') + \mathrm{C} \\
&\subseteq \mathrm{D}^2_{\mathrm{cr}}\mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{u},\mathrm{v})(\mathrm{x}') + \mathrm{C}
\end{aligned}$$

(theo Mệnh đề 3.2).
Vậy mệnh đề được chứng minh.
Ví dụ 3.1. Cho $X = Y = \mathbb{R}$, $C = \mathbb{R}_+$, $F : X \to 2^Y$ được xác định bởi $F(x) := \left\{y \in Y | y \geq x^{6/5}\right\}$. Với $(x,\ y) = (0,\ 0)$, $(u,\ v) = (1,\ 0)$, tính toán trực tiếp ta được

$$\begin{aligned}
D^2_{cr}(F+C)(x,y,u,v)(x') &= D^2_{cr}F(x,y,u,v)(x') \\
&= \{y' \in Y | y \geq 0\}.
\end{aligned}$$

Ta có thể kiểm tra rằng $D^2_{cr}(F+C)(x,y,u,v)(x')$ thoả tính chất C-trội và do đó kết luận của Mệnh đề 3.3 thoả, tức là,

$$D^2_{cr}F(x,y,u,v)(x') + C = D^2_{cr}(F+C)(x,y,u,v)(x').$$

Tuy nhiên, đạo hàm tiếp xúc cấp hai của F tại $(x,\ y)$ theo $(u,\ v)$ có giá trị là $D^2(F+C)(x,y,u,v)(x') = \varnothing$, do đó giả thiết về tính C-trội của $D^2_{cr}(F+C)(x,y,u,v)(x')$ không thoả. Vậy Mệnh đề 3.3 trong [17] không thể sử dụng (tương tự cho Định lý 3.1(i) trong [18]).

ĐẠO HÀM THEO TIA CẤP HAI DẠNG HỢP CỦA ÁNH XẠ NHIỄU

Trong phần này, chúng tôi xét bài toán tối ưu đa trị tham số *(P)* như sau:

$$\mathrm{Min}_C F(z,\ x) \quad s.t. \quad z \in G(x),$$

trong đó $F : Z \times X \to 2^Y$, $G : X \to 2^Z$, z là biến quyết định, x là tham số. Định nghĩa ánh xạ $H : X \to 2^Y$ như sau

$$H(x) := \{y \in Y | y \in F(z,\ x),\ z \in G(x)\},$$

H được gọi là ánh xạ tập giá trị chấp nhận được trong không gian mục tiêu. Từ bài toán *(P)*, chúng tôi định nghĩa ánh xạ $S : X \to 2^Y$ như sau

$$S(x) := \mathrm{Min}_C H(x),$$

được gọi là ánh xạ nhiễu của bài toán *(P)*.

Định nghĩa 4.1. ([11]) Ánh xạ H được gọi là C-minicomplete bởi S nếu với mọi x, ta có

$$H(x) \subseteq S(x) + C.$$

Bổ đề 4.1. *Cho* $(x,\ y) \in \mathrm{gr}(S)$, $(u,\ v) \in X \times Y$. *Nếu* H *là C-minicomplete bởi S thì*

$$D^2_{cr}(H+C)(x,y,u,v)(x') = D^2_{cr}(S+C)(x,y,u,v)(x').$$

Chứng minh. Vì $S(x) \subseteq H(x)$ nên $(S+C)(x) \subseteq (H+C)(x)$. Mặt khác, theo giả thiết ta có $H(x) \subseteq S(x)+C$, suy ra

$$(H+C)(x) \subseteq (S+C)(x).$$

Do đó $(H+C)(x) = (S+C)(x)$ và

$$D^2_{cr}(H+C)(x,y,u,v)(x') = D^2_{cr}(S+C)(x,y,u,v)(x'). \square$$

Định lý 4.1.*Cho* $(x,\ y) \in \mathrm{gr}(S)$, $(u,\ v) \in X \times Y$. *Giả sử C có cơ sở compact B và các giả thiết sau đây thoả:*
(i) H là C-minicomplete bởi S;
(ii) $D^2_{cr}(H+C)(x,y,u,v)(x')$ *thoả tính C-trội với mọi x'.*
Khi đó,

$$\mathrm{Min}_C D^2_{cr}H(x,y,u,v)(x') \subseteq D^2_{cr}S(x,y,u,v)(x'). \qquad (3)$$

Chứng minh. Theo Bổ đề 4.1, ta có:

$$D^2_{cr}(H+C)(x,y,u,v)(x') = D^2_{cr}(S+C)(x,y,u,v)(x').$$

Từ giả thiết (ii), $D^2_{cr}(H+C)(x,y,u,v)(x')$ cũng thoả tính C-trội. Theo Mệnh đề 3.3, ta có:

$$D^2_{cr}F(x,y,u,v)(x') + C = D^2_{cr}(F+C)(x,y,u,v)(x'),$$
$$D^2_{cr}S(x,y,u,v)(x') + C = D^2_{cr}(S+C)(x,y,u,v)(x').$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&\mathrm{Min}_C D^2_{cr}F(x,y,u,v)(x')\\ &\subseteq \mathrm{Min}_C D^2_{cr}(F+C)(x,y,u,v)(x')\\ &\subseteq \mathrm{Min}_C D^2_{cr}(S+C)(x,y,u,v)(x')\\ &\subseteq D^2_{cr}S(x,y,u,v)(x').\square\end{aligned}$$

Chiều ngược lại của (3) được suy ra từ kết quả sau đây.
Định lý 4.2.*Cho* $(x,\ y) \in \mathrm{gr}(S)$, $(u,\ v) \in X \times Y$ *Giả sử các giả thiết sau đây thoả:*
(i) H có nửa đạo hàm theo tia cấp hai dạng hợp tại (x,y) ứng với (u, v);
(ii) H là C-minicomplete bởi S;
(iii) S(x) chỉ chứa một điểm.
Khi đó,

$$D^2_{cr}S(x,y,u,v)(x') \subseteq \mathrm{Min}_C D^2_{cr}H(x,y,u,v)(x').$$

Chứng minh. Lấy

$$w \in D^2_{cr}S(x,y,u,v)(x') \in D^2_{cr}H(x,y,u,v)(x').$$

Khi đó, tồn tại $t_n > 0$, $(x_n,\ w_n) \to (x',\ w)$ sao cho

$$(u,\ v) + t_n(x_n,\ w_n) \in R(\mathrm{gr}S,\ (x,\ y)).$$

Theo định nghĩa của nón theo tia, với mỗi n, tồn tại $t_n^k > 0$, $(x_n^k,\ w_n^k) \to (u,v) + t_n(x_n,\ w_n)$ sao cho

$$(x,\ y) + t_n^k(x_n^k,\ w_n^k) \in \mathrm{gr}S,$$

hay

$$y + t_n w_n^k \in S(x + t_n^k x_n^k) \subseteq H(x + t_n^k x_n^k). \qquad (4)$$

Giả sử $w \notin \mathrm{Min}_C D^2_{cr}H(x,y,u,v)(x')$, khi đó tồn tại $\bar{w} \in D^2_{cr}H(x,y,u,v)(x')$ sao cho

$$(\bar{w} - w) \in -C \setminus \{0_Y\}. \qquad (5)$$

Theo giả thiết (i), với t_n, x_n như trên tồn tại $\bar{w}_n \to \bar{w}$ sao cho

$$(u,\ v) + t_n(x_n,\ \bar{w}_n) \in R(\mathrm{gr}H,\ (x,\ y)).$$

Hơn nữa, với mỗi n, với t_n^k, x_n^k như trên tồn tại $\bar{w}_n^k \to v + t_n\bar{w}_n$ sao cho

$$(x,\ y) + t_n^k(x_n^k,\ \bar{w}_n^k) \in grH,$$

hay

$$y + t_n^k \bar{w}_n^k \in H(x + t_n^k x_n^k).$$

Từ giả thiết (ii), (iii) và (4), ta có $\bar{w}_n^k - w_n^k \in C$, $\forall k,\ n$. Vì C là nón đóng nên suy ra $t_n(\bar{w}_n - w_n) \in C$, $\forall n$, do đó

$$\left(\bar{w} - w\right) \in C,$$

mâu thuẫn (5). Vậy $w \notin \mathrm{Min}_C D^2_{cr}H(x,y,u,v)(x')$. $\square$
Hệ quả 4.3. *Cho* $(x,\ y) \in \mathrm{gr}(S)$, $(u,\ v) \in X \times Y$. *Giả sử các giả thiết của Định lý 4.1 và 4.2 đều thoả. Khi đó,*

$$D^2_{cr}S(x,y,u,v)(x') \subseteq \mathrm{Min}_C D^2_{cr}H(x,y,u,v)(x').$$

KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi nhắc lại khái niệm đạo hàm theo tia cấp hai dạng hợp. Sau đó chúng tôi thành lập mối quan hệ giữa đạo hàm của ánh xạ F và $F+C$. Từ đó, chúng tôi thu được các kết quả về phân tích độ nhạy cho bài toán tối ưu đa trị tham số. Các kết quả đạt được là mới và cải tiến hơn so với những bài báo gần đây.

XUNG ĐỘT LỢI ÍCH

Các tác giả khẳng định không có xung đột lợi ích đối với các nghiên cứu, tác giả, và xuất bản bài báo.

ĐÓNG GÓP CỦA CÁC TÁC GIẢ

Phạm Lê Bạch Ngọc: Tìm mối liên hệ giữa các dạng đạo hàm suy rộng. Tìm hiểu các áp dụng của những đạo hàm đã có vào dạng thích hợp. Đề xuất đạo hàm theo tia dạng hợp cấp hai. Tìm hiểu về cách áp dụng của đạo hàm theo tia cấp hai dạng hợp trong phân tích độ nhạy. Viết bản thảo bài báo.

Nguyễn Thanh Tùng: Tìm mối liên hệ giữa các dạng đạo hàm suy rộng. Tìm hiểu các áp dụng của những đạo hàm đã có vào dạng thích hợp. Đề xuất đạo hàm theo tia dạng hợp cấp hai và tìm hiểu các tính chất của nó. Viết bản thảo bài báo.

Nguyễn Huỳnh Nghĩa: Lược khảo tài liệu về các dạng đạo hàm. Tìm hiểu về mối liên hệ giữa các dạng đạo hàm suy rộng. Tìm hiểu các áp dụng của những đạo hàm đã có vào dạng thích hợp. Hỗ trợ tính toán một số ví dụ minh họa trong bài báo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] H. Kuh, T. Tanino, and M. Tanaka. Sensitivity analsysis in parametrized convex vector optimization. *Journal of Mathematical Analsysis and Applications*, 202:511–522, 1996.

[2] H. Kuh, T. Tanino, and M. Tanaka. Sensitivity analsysis in vector optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 89:713–730, 1996.

[3] D.S. Shi. Contingent derivative of the perturbation map in multiobjective optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 70:385–396, 1991.

[4] D. S. Shi. Sensitivity analysis in convex vector optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 77:145–159, 1993.

[5] T. Tanino. Sensitivity analysis in multiobjective optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 56:479–499, 1988.

[6] T. Tanino. Stability and sensitivity analysis in convex vector optimization. *SIAM Journal of Control Optimization*, 26:521–536, 1988.

[7] J. P. Aubin and H. Frankowska. Set-Valued Analysis, Birkhauser. Boston. 1990.

[8] N. L. H. Anh. Some results on sensitivity analysis in set-valued optimization. *Positivity*, 21:1527–1543, 2017.

[9] N. L. H. Anh. Sensitivity analysis in constrained set-valued optimization via Studniarski derivatives. *Positivity*, 21(2017):255–272.

[10] N. L. H. Anh and P. Q. Khanh. Higher-order optimality conditions in set-valued optimization using radial sets and radial derivatives. *Journal of Global Optimization*, 56:519–536, 2013.

[11] N. L. H. Anh and P. Q. Khanh. Variational Sets of Perturbation Maps and Applications to Sensitivity Analysis for Constrained Vector Optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 158:363–384, 2013.

[12] N. L. H. Anh and P. Q. Khanh. Higher-order optimality conditions for proper efficiency in nonsmooth vector optimization using radial sets and radial derivatives. *Journal of Global Optimization*, 58:693–709, 2014.

[13] N. L. H. Anh, P. Q. Khanh, and L. T. Tung. Higher-order radial derivatives and optimality conditions in nonsmooth vector optimization. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 74:7365–7379, 2011.

[14] F. Flores-Bazan. Optimality conditions in nonconvex set-valued optimization. *Mathematical Methods of Operations Research*, 53:403–417, 2001.

[15] S. J. Li and C. M. Liao. Second-order differentiability of generalized perturbation maps. *Journal of Global Optimization*, 52:243–252, 2012.

[16] Q. L. Wang and S. J. Li. Higher-order sensitivity analysis in nonconvex vector optimization. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 6:381–392, 2010.

[17] Q. L. Wang and S. J. Li. Sensitivity and stability for the second-order contingent derivative of the proper perturbation map in vector optimization. *Optimization Letter*, 6:731–748, 2012.

[18] Y. H. Xu and Z. H. Peng. Higher-order sensitivity analysis in set-valued optimization under Henig efficiency. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 13:313–327, 2017.

[19] A. Taa. Set-valued derivatives of multifunctions and optimality conditions. *Numerical Functional Analysis Optimization*, 19:121–140, 1998.

[20] R. T. Rockafellar and R. J. B. Wets. Variational Analysis, 3rd edn. Springer: Berlin. 2009.

Science & Technology Development Journal – Natural Sciences, 4(3):567-572

Open Access Full Text Article

Research Article

The second-order composed radial derivatives of perturbation mappings of parametric set-valued optimization problems

Pham Le Bach Ngoc*, Nguyen Thanh Tung, Nguyen Huynh Nghia

ABSTRACT

In the paper, we study the generalized differentiability in set-valued optimization, namely stydying the second-order composed radial derivative of a given set-valued mapping. Inspired by the adjacent cone and the higher-order radial con in Anh NLH et al. (2011), we introduce the second-order composed radial derivative. Then, its basic properties are investigated and relationships between the second-order compsoed radial derivative of a given set-valued mapping and that of its profile are obtained. Finally, applications of this derivative to sensitivity analysis are studied. In detail, we work on a parametrized set-valued optimization problem concerning Pareto solutions. Based on the above-mentioned results, we find out sensitivity analysis for Pareto solution mapping of the problem. More precisely, we establish the second-order composed radial derivative for the perturbation mapping (here, the perturbation means the Pareto solution mapping concerning some parameter). Some examples are given to illustrate our results. The obtained results are new and improve the existing ones in the literature.

Key words: second-order composed radial derivative, perturbation mappings, sensitivity analysis, parametric set-valued optimization

Faculty of Pedagody and Social Sciences & Humanities, Kien Giang University, Kien Giang Province, Vietnam

Correspondence

Pham Le Bach Ngoc, Faculty of Pedagody and Social Sciences & Humanities, Kien Giang University, Kien Giang Province, Vietnam

Email: plbngoc0611@gmail.com

History

- Received: 03-09-2019
- Accepted: 08-12-2019
- Published: 01-7-2020

DOI : 10.32508/stdjns.v4i3.838

Cite this article : Ngoc P L B, Tung N T, Nghia N H. **The second-order composed radial derivatives of perturbation mappings of parametric set-valued optimization problems** . *Sci. Tech. Dev. J. - Nat. Sci.;* 4(3):567-572.