Tạp chí Phát triển Khoa học và Công nghệ – Khoa học Tự nhiên, 3(3):213-224

Open Access Full Text Article

Bài nghiên cứu

Điều kiện đủ cho tính chất epsilon-co của một lớp hệ phương trình sai phân phi tuyến với biến liên tục

Đặng Lệ Thúy[1], Cao Thanh Tình[1,*], Lê Trung Hiếu[2], Lê Huỳnh Mỹ Vân[1]

TÓM TẮT

Tính chất co của các hệ động lực nói chung và các hệ phương trình sai phân nói riêng là một trong những tính chất định tính được sự quan tâm khai thác của các nhà nghiên cứu trong suốt những thập niên gần đây. Tính chất co của các hệ động lực có nhiều ứng dụng trong các mô hình thực tế, là tính chất mà hai quỹ đạo bất kỳ của hệ động lực hội tụ về nhau khi biến thời gian dần ra dương vô hạn.Trong bài báo này, trên cơ sở cải tiến một số phương pháp tiếp cận đã có, chúng tôi trình bày một phương pháp tiếp cận mới cho bài toán co của một lớp hệ phương trình sai phân phi tuyến có chậm phụ thuộc thời gian với biến liên tục. Chúng tôi mở rộng khái niệm co thành khái niệm tổng quát hơn là ε-co. Từ đó, chúng tôi đưa ra một số điều kiện tường minh mới cho tính chất ε-co và ổn định mũ của lớp hệ này. Ngoài ra, chúng tôi nghiên cứu điều kiện ε-co của lớp hệ phương trình sai phân phi tuyến có chậm với biến liên tục chịu nhiễu phi tuyến, với các hàm nhiễu là hàm phụ thuộc thời gian tổng quát. Từ đó, chúng tôi đưa ra biên cho tính ε-co của lớp hệ này chịu nhiễu phi tuyến. Các kết quả đạt được là mở rộng tổng quát của một số kết quả đã có trước đây của nhiều tác giả khác. Một ví dụ được đưa ra nhằm minh họa cho kết quả đạt được.

Từ khoá: Biên co, co, hệ chịu nhiễu, ổn định mũ, phương trình sai phân với biến liên tục

MỞ ĐẦU

Giới thiệu

Phương trình sai phân nói chung và phương trình sai phân với biến liên tục nói riêng có nhiều ứng dụng trong các mô hình thực tế[1]. Các bài toán về tính chất định tính của nghiệm của các hệ phương trình sai phân như tính chất ổn định, hút, điều khiển được, bị chặn,… đã và đang thu hút các nhà nghiên cứu trong suốt những thập niên vừa qua[2–7]. Năm 1998, Lohmiller và Slotine[8] đã đưa ra một số mô hình thực tế về cơ học chất lỏng dẫn đến việc nghiên cứu bài toán về tính chất co của các hệ động lực. Trong đó, các tác giả đã đưa ra nhiều điều kiện cho tính co của hệ phương trình sai phân thường và hệ phương trình vi phân thường. Các kết quả này sau đó được ứng dụng vào một số mô hình bài toán điều khiển và thiết kế quan sát đối với một số hệ động lực.

Các bài toán về tính chất co của hệ động lực sau đó được tiếp tục nghiên cứu, phát triển bởi nhiều nhóm tác giả[7,9,10]. Gần đây, bài toán về tính chất co cho hệ phương trình sai phân phi tuyến có chậm với biến rời rạc[7] và hệ phương trình vi phân phiếm hàm[10] lần lượt đã được nghiên cứu. Trong đó, nhóm tác giả đã đưa ra nhiều điều kiện đủ, tường minh cho tính chất co của hệ phương trình sai phân phi tuyến và hệ phương trình vi phân phiếm hàm. Tuy nhiên, tính chất co của một số lớp hệ phương trình sai phân và vi phân thường gặp chẳng hạn như hệ phương trình sai phân với biến liên tục, hệ phương trình vi phân trung hòa, hệ phương trình sai phân và vi phân kết hợp, hệ phương trình có yếu tố ngẫu nhiên... chưa được nghiên cứu một cách đầy đủ.

Nhằm đóng góp một phần lý thuyết vào vấn đề mở nêu trên, trong bài báo này, chúng tôi mở rộng khái niệm co thành khái niệm tổng quát hơn là ε-co, và đưa ra nhiều điều kiện cho tính ε-co của nghiệm đối với một lớp hệ phương trình sai phân phi tuyến với biến liên tục. Các kết quả đạt được là mở rộng tổng quát thật sự của một số kết quả đã có trước đây của các tác giả khác.

Một số quy ước và kí hiệu

Gọi $\mathbf{Z}$ là tập hợp tất cả các số nguyên và kí hiệu $\mathbf{Z}_+ := \{k \in \mathbf{Z} : k \geq 0\}$ Với mỗi $m \in \mathbf{Z}_+$, kí hiệu $\underline{m} := \{1, 2, \ldots, m\}$. Gọi $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ lần lượt là trường các số thực và trường các số phức. Với hai số nguyên dương l,

[1]*Trường Đại học Công nghệ Thông tin, ĐHQG-HCM.*

[2]*Trường Đại học Đồng Tháp*

Liên hệ

Cao Thanh Tình, Trường Đại học Công nghệ Thông tin, ĐHQG-HCM.

Email: tinhct@uit.edu.vn

Lịch sử

- Ngày nhận: 20-12-2018
- Ngày chấp nhận: 29-7-2019
- Ngày đăng: 31-9-2019

DOI : 10.32508/stdjns.v3i3.649

Trích dẫn bài báo này: Thúy D L, Tình C T, Hiếu L T, Mỹ Vân L H. **Điều kiện đủ cho tính chất epsilon-co của một lớp hệ phương trình sai phân phi tuyến với biến liên tục**. *Sci. Tech. Dev. J. - Nat. Sci.;* 3(3):213-224.

q, kí hiệu $\mathbf{R}^{l\times q}, \mathbf{R}_+^{l\times q}$, lần lượt là tập hợp các ma trận thực và tập hợp các ma trận thực không âm cỡ $l\times q$. Với hai ma trận thực $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbf{R}^{l\times q}$ ta quy ước bất đẳng thức giữa $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ như sau: $A \geq (\leq, \gg, \ll) B$ tương đương với $a_{ij} \geq (\leq, >, <) b_{ij}$, với mọi $i \in \underline{l}, j \in \underline{q}$. Cách hiểu tương tự khi so sánh hai véctơ. Chuẩn của ma trận $A = (a_{ij}) \in \mathbf{K}^{n\times n}$ được hiểu là chuẩn toán tử (operator norm) và được xác định bởi $\|A\| := \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Cho $A \in \mathbf{R}^{n\times n}, B \in \mathbf{R}_+^{n\times n}$, nếu $|A| \leq B$ thì $\|A\| \leq \|B\|$. Với $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$, *bán kính phổ* (spectral radius) của A được xác định bởi $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathbf{C}, \det(\lambda I_n - A) = 0\}$.

ĐIỀU KIỆN CHO TÍNH ε-CO CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN CÓ CHẬM VỚI BIẾN LIÊN TỤC

Trong mục này chúng tôi nghiên cứu điều kiện co của lớp hệ phương trình sai phân có chậm phụ thuộc thời gian với biến liên tục có dạng như sau

$$x(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t; x(t-h_i)) + \int_{-h}^{0} g(t,s,x(t+s))ds, t \geq t_0 \tag{1}$$

trong đó, $f_i(\cdot;\cdot) : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, i \in \underline{m}$ và $g(\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbf{R}_+ \times [-h,0] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ là những hàm liên tục cho trước và $h, h_i > 0, i \in \underline{m}$.

Đặt $\tau := \max\{h, h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ và $\mathrm{C} := \mathrm{C}([-\tau,0], \mathbf{R}^n)$.Ta cố định $t_0 \in \mathbf{R}_+, \varphi \in \mathrm{C}$ và xét cho hệ phương trình (1) một điều kiện đầu có dạng sau

$$x(s+t_0) = \varphi(s), \quad \text{voi } s \in [-\tau, 0] \tag{2}$$

Nếu bài toán giá trị đầu (1)-(2) có nghiệm, kí hiệu bởi $x(\cdot, t_0, \varphi)$, thì hàm điều kiện đầu $\varphi(\cdot)$ phải thỏa mãn điều kiện $\varphi(0) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t_0, \varphi(-h_i)) + \int_{-h}^{0} g(t,s,\varphi(s))ds$. Do đó, việc nghiên cứu nghiệm liên tục của (1)-(2) dẫn đến lớp các hàm điều kiện đầu sau đây

$$\mathrm{C}_{t_0} := \left\{\varphi \in \mathrm{C} : \varphi(0) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t_0, \varphi(-h_i)) + \int_{-h}^{0} g(t,s,\varphi(s))ds\right\}$$

Cho trước $t_0 \in \mathbf{R}_+$ cố định và $\varphi \in \mathrm{C}_{t_0}$. Trong suốt bài báo này chúng tôi giả sử bài toán giá trị đầu (1)-(2) có duy nhất nghiệm là $x(\cdot, t_0, \varphi)$. Nghiệm này là hàm nhận giá trị véctơ trong $\mathbf{R}^n$, liên tục trên $[-\tau + t_0, \infty)$ và thỏa mãn (1), (2) với mọi $t \geq t_0$.

Cho điểm $x_e \in \mathbb{R}^n$, khi đó x_e được gọi là điểm cân bằng (equilibrium point) của hệ (1) nếu $\sum_{i=1}^{m} f_i(t; x_e) + \int_{-h}^{0} g(t,s,x_e)ds = x_e$ với mọi $t \in \mathbf{R}, t \geq -\tau + t_0$. Ta thấy rằng nếu $f_i(t;0) = 0$, với mọi $t \in \mathbf{R}, i \in \underline{m}$ và $g(t,s,0) = 0$ với mọi $t \in \mathbf{R}, s \in [-h,0]$ thì $x_e = 0$ là một điểm cân bằng của (1). Khi hệ (1) có điểm cân bằng 0 thì với hàm điều kiện đầu $\varphi(s) = 0$, với mọi $s \in [-\tau, 0]$, hệ (1) có nghiệm $x(t, t_0, 0) = 0$ với mọi $t \geq t_0$. Ta có định nghĩa sau đây về ε-co và co của hệ (1).

Định nghĩa 2.1. Hệ (1) được gọi là ε-co (ε-contractive) nếu tồn tại $M > 0, \varepsilon > 0, \lambda \in (0,1)$ sao cho

$$\|x(t,t_0,\varphi) - x(t,t_0,\psi)\| \leq M\lambda^{t-t_0}\|\varphi - \psi\| + \varepsilon \tag{3}$$

với mọi $t \in \mathbf{R}, t \geq t_0, \varphi, \psi \in \mathrm{C}_{t_0}$. Trong đó, $\|\varphi - \psi\| = \max\{\|\varphi(s) - \psi(s)\|, s \in [-\tau, 0]\}$.

Trường hợp bất đẳng thức (3) đúng với $\varepsilon = 0$ thì hệ (1) được gọi ngắn gọn là co (contractive) ([7], Definition 2.1]).

Ta thấy rằng, tính chất ε-co là mở rộng của tính chất co. Sau đây là định nghĩa về ổn định mũ của nghiệm không của hệ (1).

Định nghĩa 2.2. ([6], Definition 1]) Nghiệm không của (1) được gọi là *ổn định mũ toàn cục* (globally exponentially stable) nếu tồn tại $M > 0, \lambda \in (0,1)$, sao cho

$$\|x(t,t_0,\varphi)\| \leq M\lambda^{t-t_0}\|\varphi\|,$$

với mọi $t \in \mathbf{R}, t \geq t_0, \varphi \in C_{t_0}$. Trong đó, $\|\varphi\| = \max\{\|\varphi(s)\|, s \in [-\tau, 0]\}$.
Khi nghiệm không của (1) là ổn định mũ toàn cục, ta cũng nói hệ (1) là ổn định mũ toàn cục.
Trong suốt mục này, chúng tôi giả thiết rằng
(H) Tồn tại $A_i(\cdot) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^{n\times n}, i \in \underline{m}, B(\cdot,\cdot) : \mathbf{R} \times [-h, 0] \to \mathbf{R}_+^{n\times n}, i \in \underline{m}$,và các hàm bị chặn $u_i(\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_+^n, i \in \underline{m}, v(\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_+^n$, sao cho

$$\begin{cases} \left|f_i(t,x)-f_i(t,y)\right| \leq A_i(t)|x-y|+u_i(t,x,y),\ \forall i\in\underline{m}, t\in\mathbf{R}, x,y\in\mathbf{R}^n \\ |g(t,s,x)-g(t,s,y)| \leq B(t,s)|x-y|+v(t,x,y), s\in[-h,0], t\in\mathbf{R}, x,y\in\mathbf{R}^n \end{cases} \tag{4}$$

Sau đây, chúng tôi đưa ra một số điều kiện tường minh cho tính ε-co của hệ (1).
Định lí 2.3. Giả sử (H) và một trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn
(i) Tồn tại $\lambda \in (0,1), p \in \mathbf{R}^n, p \gg 0$
sao cho

$$\left(\sum_{i=1}^{m} A_i(t)\lambda^{-h_i} + \int_{-h}^{0} B(t,s)\lambda^s ds\right) p \ll p, \forall t \in \mathbf{R} \tag{5}$$

(ii) Tồn tại sao cho $D \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}_{\mathbf{n}+}, \rho(D) < 1$

$$\sum_{i=1}^{m} A_i(t) + \int_{-h}^{0} B(t,s)ds \leq D, \forall t \in \mathbf{R} \tag{6}$$

(iii) Tồn tại $A_i \in \mathbf{R}_+^{n\times n}, i \in \underline{m}$ *và hàm liên tục* $G(\cdot) : [-h,0] \to \mathbf{R}_+^{n\times n}$, $\rho\left(\sum_{i=1}^{m} A_i + \int_{-h}^{0} G(s)ds\right) < 1$ *sao cho*

$$A_i(t) \leq A_i, \forall t \in \mathbf{R}, i \in \underline{m}, B(t,s) \leq G(s), \forall t \in \mathbf{R}, s \in [-h,0] \tag{7}$$

(iv) Tồn tại $\gamma \in (0,1)$ *sao cho*

$$\sum_{i=1}^{m} \|A_i(t)\| \gamma^{-h_i} + \int_{-h}^{0} \|B(t,s)\| \gamma^s ds < 1, \forall t \in \mathbf{R} \tag{8}$$

Khi đó, hệ (1) là ε*-co. Ngoài ra, khi* $u_i(t,x,y) = v(t,x,y) = 0$ *với mọi* $t \in \mathbf{R}, x, y \in \mathbf{R}^n, i \in \underline{m}$ *thì hệ (1) là co.*
Bổ đề sau đây được sử dụng trong chứng minh của Định lý 2.3.
Bổ đề 2.4 ([7], Lemma 1.1]). *Cho ma trận* $A \in \mathbf{R}_+^{n\times n}$. *Các khẳng định sau đây là tương đương*
(i) $\rho(A) < 1$; (ii) $\exists p \in \mathbf{R}^n, p \gg 0 : Ap \ll p$; (iii) $(I_n - A)^{-1} \geq 0$
Chứng minh Định lí 2.3. (i) Giả sử (i) được thỏa mãn với $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^T \gg 0$. Ta cần chứng minh tồn tại $M > 0, \varepsilon > 0, \lambda \in (0,1)$ sao cho

$$\|x(t,t_0,\varphi) - x(t,t_0,\psi)\| \leq M\lambda^{t-t_0}\|\varphi - \psi\| + \varepsilon,$$

với mọi $t \in \mathbf{R}, t \geq t_0, \varphi, \psi \in C_{t_0}$
Lấy $\varphi, \psi \in C_{t_0}(\varphi \neq \psi)$ là hai hàm điều kiện đầu cố định nào đó, sau đây để phép chứng minh được ngắn gọn, ta đặt $x(\cdot) := x(\cdot,t_0,\varphi), y(\cdot) := x(\cdot,t_0,\psi)$. Khi đó,

$$\begin{aligned} |x(s+t_0) - y(s+t_0)| &= |\varphi(s) - \psi(s)| \\ &\leq \|\varphi - \psi\| \frac{p}{\min\{p_i, i \in \underline{n}\}}, \\ &s \in [-\tau, 0]. \end{aligned} \tag{9}$$

Do $\lambda \in (0,1), p \gg 0$ nên từ (5) ta có

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^{m} A_i(t) + \int_{-h}^{0} B(t,s)ds\right) p \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{m} A_i(t)\lambda^{-h_i} + \int_{-h}^{0} B(t,s)\lambda^s ds\right) p \ll p, \forall t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Khi đó, tồn tại $\delta \in (0,1)$ và đủ gần 1 sao cho

$$\left(\sum_{i=1}^{m} A_i(t) + \int_{-h}^{0} B(t,s)ds\right) p \ll \delta p, \forall t \in \mathbf{R}.$$

Đặt $w(t) := \lambda^{t-t_0-1}\|\varphi - \psi\| \frac{p}{\min\{p_i, i\in \underline{n}\}} + K\frac{p}{\min\{p_i, i\in \underline{n}\}}, t \in [t_0 - \tau, \infty]$, trong đó

$$K = \frac{1}{1-\delta}\max_{1\le i\le n}\left\{\sup_{t\ge t_0, x,y\in \mathbf{R}^n}\{u_{1i}(t,x,y) + \dots + u_{mi}(t,x,y) + hv_i(t,x,y)\}\right\}, \tag{10}$$

với $u_i(t,x,y) = (u_{i1}(t,x,y), u_{i2}(t,x,y), \dots, u_{in}(t,x,y))$ và $v(t,x,y) = (v_1(t,x,y), v_2(t,x,y), \dots, u_n(t,x,y))$.
Từ (9) và cách đặt $w(t)$ ở trên, ta có

$$\begin{aligned}|x(s+t_0) - y(s+t_0)| &\le \|\varphi - \psi\| \frac{p}{\min\{p_i, i\in \underline{n}\}}\\ &\ll \lambda^{-1}\|\varphi - \psi\| \frac{p}{\min\{p_i, i\in \underline{n}\}}\\ &\le w(s+t_0), \forall s \in [-\tau, 0].\end{aligned}$$

$$Hay\ |x(s) - y(s)| \ll w(s), \forall s \in [-\tau + t_0, t_0].$$

Ta cần chứng minh $|x(t) - y(t)| \le u(t)$, với mọi $t \ge -\tau + t_0$.
Đặc biệt, tại $t = t_0$ ta có $|\varphi(0) - \psi(0)| = |x(t_0) - y(t_0)| \ll w(t_0)$. Do tính liên tục của các hàm $x(t), y(t), w(t)$ nên tồn tại $\sigma > 0$ sao cho $w(t) \ge |x(t) - y(t)|, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \sigma)$. Tiếp theo, ta chứng minh

$$|x(t) - y(t)| \le w(t), \quad \forall t \ge t_0 \tag{11}$$

Dùng phương pháp phản chứng, giả sử ngược lại rằng tồn tại số thực $t_1 > t_0$ sao cho $w(t_1)$ không lớn hơn hoặc bằng $|x(t_1) - y(t_1)|$. Đặt $t_* := \inf\{t_1 > t_0 : w(t_1)$ không lớn hơn hoặc bằng $|x(t_1) - y(t_1)|\} < \infty$. Khi đó, $t_* > t_0$ và tồn tại chỉ số $i_0 \in \underline{n}$ sao cho

$$\begin{cases} |x(t) - y(t)| \le w(t), \quad \forall t \in [t_0, t_*)\\ |x_{i_0}(t_*) - y_{i_0}(t_*)| = w_{i_0}(t_*)\\ |x_{i_0}(t) - y_{i_0}(t)| > w_{i_0}(t), \forall t \in (t_*, t_* + \theta)\end{cases} \tag{12}$$

với $\theta > 0$ đủ nhỏ.
Từ (1), (2), (4), (5), (9) và (12) ta có

$$|x(t_*)-y(t_*)| \le \sum_{i=1}^{m} \left| f_i(t_*, x(t_*-h_i)) - f_i(t_*, y(t_*-h_i)) \right| + \int_{-h}^{0} |g(t_*, s, x(t_*+s)) - g(t_*, s, y(t_*+s))| ds$$

$$+\sum_{i=1}^{m} u_i\left(t, x(t_*-h_i), y(t_*-h_i)\right) + \int_{-h}^{0} v\left(t, x(t_*+s), y(t_*+s)\right) ds$$

$$\le \sum_{i=1}^{m} A_i(t_*) w(t_*-h_i) + \int_{-h}^{0} B(t_*, s) w(t_*+s) ds + \sum_{i=1}^{m} u_i\left(t, x(t_*-h_i), y(t_*-h_i)\right) + \int_{-h}^{0} v\left(t, x(t_*+s), y(t_*+s)\right) ds$$

$$\le \sum_{i=1}^{m} A_i(t_*)\left(\lambda^{t_*-h_i-t_0-1}\|\varphi-\psi\|+K\right)\frac{p}{\min\{p_i, i\in \underline{n}\}} + \int_{-h}^{0} B(t_*, s)\left(\lambda^{t_*+s-t_0-1}\|\varphi-\psi\|+K\right)\frac{p}{\min\{p_i, i\in \underline{n}\}} ds \,|$$

$$+\max_{1\le i\le n}\left\{\sup_{t\ge t_0, x, y\in \mathbf{R}^n}\{u_{1i}(t,x,y)+\ldots+u_{mi}(t,x,y)+h v_i(t,x,y)\}\right\}\frac{p}{\min\{p_i, i\in \underline{n}\}}$$

$$=\lambda^{t_*-t_0-1}\|\varphi-\psi\|\left(\sum_{i=1}^{m} A_i(t_*)\lambda^{-h_i} + \int_{-h}^{0} B(t_*, s)\lambda^{s} ds\right)\frac{p}{\min\{p_i, i\in \underline{n}\}} + K\left(\sum_{i=1}^{m} A_i(t_*) + \int_{-h}^{0} B(t_*, s) ds\right)\frac{p}{\min\{p_i, i\in \underline{n}\}}$$

$$+(1-\delta)K\frac{p}{\min\{p_i, i\in \underline{n}\}}$$

$$\square\ \lambda^{t_*-t_0-1}\|\varphi-\psi\|\frac{p}{\min\{p_i, i\in \underline{n}\}} + K\frac{\delta p}{\min\{p_i, i\in \underline{n}\}} + (1-\delta)K\frac{p}{\min\{p_i, i\in \underline{n}\}}$$

$$\le \lambda^{t_*-t_0-1}\|\varphi-\psi\|\frac{p}{\min\{p_i, i\in \underline{n}\}} + K\frac{p}{\min\{p_i, i\in \underline{n}\}}$$

$$= w(t_*).$$

Điều này mâu thuẫn với (12). Do đó, (11) được thỏa mãn. Do tính đơn điệu của chuẩn véctơ,

$$\|x(t)-y(t)\| = \||x(t)-y(t)|\| \le \|w(t)\| \le \lambda^{t-t_0-1}\|\varphi-\psi\|\frac{\|p\|}{\min\{p_i, i\in \underline{n}\}} + K\frac{\|p\|}{\min\{p_i, i\in \underline{n}\}}, \ \forall t \ge t_0.$$

Hay

$$\|x(t)-y(t)\| \le M\lambda^{t-t_0}\|\varphi-\psi\| + \varepsilon, \ \forall t \ge t_0,$$

trong đó $M = \lambda \frac{\|p\|}{\min\{p_i, i\in \underline{n}\}}, \varepsilon = K\frac{\|p\|}{\min\{p_i, i\in \underline{n}\}}$. Vậy hệ (1) là ε-co.

Khi $u_i(t,x,y) = v(t,x,y) = 0$, với mọi $t \in \mathbf{R}, x, y \in \mathbf{R}^n, i \in \underline{m}$ thì $K = 0$ hay $\varepsilon = 0$. Khi đó, hệ (1) là co.

(ii) Ta chứng minh (ii) kéo theo (i). Thật vậy, vì $D \in \mathbf{R}_+^{n\times n}$ và $\rho(D) < 1$ nên theo Bổ đề 2.4 (i) (ii), tồn tại $p \in \mathbf{R}^n, p \gg 0$ sao cho $Dp \ll p$. Với $\tau := \max\{h, h_1, \ldots, h_m\}$, ta có tồn tại $\lambda_0 \in (0,1)$ và đủ gần 1 sao cho $\lambda_0^{-\tau} Dp \ll \lambda_0 p$. Từ đó, ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{m} A_i(t)\lambda_0^{-h_i} + \int_{-h}^{0} B(t,s)\lambda_0^{s} ds\right) p \le \lambda_0^{-\tau}\left(\sum_{i=1}^{m} A_i(t) + \int_{-h}^{0} B(t,s) ds\right) p$$

$$\le \lambda_0^{-\tau} Dp \ll \lambda_0 p \ll p, \forall t \in \mathbf{R}$$

Do đó (i) được thỏa mãn. Vậy (1) là ε-co và khi $u_i(t,x,y) = v(t,x,y) = 0$, với mọi $t \in \mathbf{R}$, $x, y \in \mathbf{R}^n, i \in \underline{m}$ thì hệ (1) là co.

(iii) Ta thấy, (iii) là trường hợp đặc biệt của (ii) với $D = \sum_{i=1}^{m} A_i + \int_{-h}^{0} G(s) ds$.

(iv) Giả sử (iv) được thỏa mãn. Lấy $\varphi, \psi \in C_{t_0}(\varphi \ne \psi)$ là hai hàm điều kiện đầu cố định nào đó, ta đặt: $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, \varphi), y(\cdot) := x(\cdot, t_0, \psi)$. Từ cách xác định của $\|\varphi - \psi\|$, ta có:

$$\|x(s+t_0) - y(s+t_0)\| = \|\varphi(s) - \psi(s)\| \le \|\varphi - \psi\|, s \in [-\tau, 0] \quad (13)$$

Do $\gamma \in (0,1)$ nên từ (8) ta có:

$$\sum_{i=1}^{m} \|A_i(t)\| + \int_{-h}^{0} \|B(t,s)\| ds \le \sum_{i=1}^{m} \|A_i(t)\| \gamma^{-h_i} + \int_{-h}^{0} \|B(t,s)\| \gamma^{s} ds < 1, \forall t \in \mathbf{R}.$$

Khi đó, tồn tại $\eta \in (0,1)$ và đủ gần 1 sao cho $\sum_{i=1}^{m} \|A_i(t)\| + \int_{-h}^{0} \|B(t,s)\| ds < \eta, \quad t \in \mathbf{R}$. Đặt $w(t) := \gamma^{t-t_0-1} \|\varphi - \psi\| + \varepsilon, t \in [t_0 - \tau, \infty]$, trong đó:

$$\varepsilon = \frac{1}{1-\eta} \max_{1 \le i \le n} \Big\{ \sup_{t \ge t_0, x, y \in \mathbf{R}^n} \{\|u_{1i}(t,x,y)\| + \ldots + \|u_{mi}(t,x,y)\| + h\|v_i(t,x,y)\|\}\Big\} \tag{14}$$

Từ (13) và cách đặt $w(t)$ ở trên, ta có $\|x(s+t_0) - y(s+t_0)\| \le \|\varphi - \psi\| < \gamma^{-1}\|\varphi - \psi\| \le w(s+t_0)$, với mọi $s \in [-\tau, 0]$. Hay $\|x(s) - y(s)\| < w(s)$ với mọi $s \in [-\tau + t_0, t_0]$. Ta cần chứng minh $\|x(t) - y(t)\| \le w(t)$ với mọi $t \ge -\tau + t_0$. Đặc biệt, tại $t - t_0$ ta có $\|\varphi(0) - \psi(0)\| = \|x(t_0) - y(t_0)\| < w(t_0)$. Do tính liên tục của các hàm $x(t)$, $y(t)$và $w(t)$ nên tồn tại $\sigma > 0$ đủ bé sao cho $w(t) \ge \|x(t) - y(t)\|$, với mọi $t \in [t_0, t_0 + \sigma)$. Tiếp theo, ta chứng minh bất đẳng thức vừa nêu là đúng với mọi $t > t_0$,

$$\|x(t) - y(t)\| \le w(t), \quad \forall t \ge t_0. \tag{15}$$

Dùng phương pháp phản chứng, giả sử ngược lại rằng tồn tại số thực $t_1 > t_0$ sao cho $\|x(t_1) - y(t_1)\| > w(t_1)$. Đặt $t_* := \inf\{t_1 > t_0 :< \|x(t_1) - y(t_1)\| > w(t_1)\} < \infty$. Khi đó, $t_* > t_0$ và

$$\|x(t) - y(t)\| \ge w(t), \forall t \in (t_*, t_* + \theta) \tag{16}$$

với $\theta > 0$ đủ nhỏ. Kết hợp với các điều kiện (4), (8), ta chứng minh được $\|x(t_*) - y(t_*)\| < w(t_*)$. Điều này mâu thuẫn với (16). Do đó, (15) được thỏa mãn. Vậy hệ (1) là ε-co.
Khi $u_i(t,x,y) = v(t,x,y) = 0$, với mọi $t \in \mathbf{R}, x, y \in \mathbf{R}^n, i \in \underline{m}$ thì ta có $\varepsilon = 0$. Khi đó hệ (1) là co. Định lí được chứng minh.

Định lí 2.5. *Giả sử tồn tại $A_i \in \mathbf{R}_{+}^{n\times n}, i \in \underline{m}, G(\cdot) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_{+}^{n\times n}$, và các hàm bị chặn $u_i(\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_{+}^{n}, i \in \underline{m}, v(\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_{+}^{n}$, sao cho*

$$\begin{cases} |f_i(t,x) - f_i(t,y)| \le A_i|x-y| + u_i(t,x,y), \ \forall i \in \underline{m}, \ t \in \mathbf{R}, x, y \in \mathbf{R}^n \\ |g(t,s,x) - g(t,s,y)| \le G(s)|x-y| + v(t,x,y), \ t \in \mathbf{R}, s \in [-h,0], x, y \in \mathbf{R}^n \end{cases}$$

Khi đó, nếu $\rho\left(\sum_{i=1}^{m} A_i + \int_{-h}^{0} G(s) ds\right) < 1$ thì hệ (1) là ε-co. Ngoài ra, khi $u_i(t,x,y) = v(t,x,y) = 0$ với mọi $t \in \mathbf{R}, x, y \in \mathbf{R}^n, i \in \underline{m}$ thì hệ (1) là co.

Định lí 2.5 được áp dụng trực tiếp vào nghiên cứu tính chất ε-co, co của hệ phương trình sai phân chịu nhiễu ở mục tiếp theo.

Nhận xét 2.6. (i) Trường hợp đặc biệt khi dấu "=" trong (4) xảy ra thì hệ (1) trở thành hệ phương trình sai phân nửa tuyến tính dương, phụ thuộc thời gian có dạng

$$x(t) = \sum_{i=1}^{m} A_i(t) x(t-h_i) + \int_{-h}^{0} G(t,s) x(t+s) ds + H\left(t, x(t-h_1), \ldots, x(t-h_m), \int_{-h}^{0} x(t+s) ds\right) \tag{17}$$

trong đó, H (.,...,.) là hàm bị chặn. Khi đó, suy ra trực tiếp từ Định lí 2.3, (17) là ε-co nếu một trong các điều kiện (i), (ii) và (iii) của Định lí 2.3 được thỏa mãn. Ngoài ra, khi dấu "=" trong (4) xảy ra và $u_i(t,x,y) = v(t,x,y) = 0$, với mọi $t \in \mathbf{R}, x, y \in \mathbf{R}^n, i \in \underline{m}$ thì ta có H (.,...,.) kéo theo $\varepsilon = 0$ và do đó hệ (17) là co.
(ii) Trường hợp đặc biệt $f_i(t,x) \equiv A_i x + u_i(t), t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n, i \in \underline{m}$ và $g(t,s,x) \equiv G(s)x, \quad t \in \mathbf{R}, \quad s \in [-h,0], x \in \mathbf{R}^n$, khi đó (1) trở thành phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất

$$x(t) = \sum_{i=1}^{m} A_i x(t-h_i) + \int_{-h}^{0} G(s) x(t+s) ds + u(t) \tag{18}$$

với $u(t) = u_1(t) + \ldots + u_m(t)$. Ta biết rằng khi $u(t) = 0$ với mọi $t \in \mathbf{R}$ thì (18) trở thành hệ phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất

$$x(t) = \sum_{i=1}^{m} A_i x(t-h_i) + \int_{-h}^{0} G(s)x(t+s)\Big)\, ds \tag{19}$$

Hệ (19) là tuyến tính và luôn có nghiệm không, khi đó tính chất co và ổn định mũ là trùng nhau. Tác giả đã chỉ ra rằng (19) là ổn định mũ nếu ([4, Lemma 1]):

$$\sum_{i=1}^{m} \|A_i\| + h \sup_{s\in[-h,0]} \|G(s)\| < 1. \tag{20}$$

Từ (20) suy ra tồn tại sao cho $\sum_{i=1}^{m} \|A_i\| \lambda^{-h_i} + h \sup_{s\in[-h,0]} \|G(s)\| \lambda^{-h} < 1$. Khi đó,

$$\sum_{i=1}^{m} \|A_i\| \lambda^{-h_i} + \int_{-h}^{0} \|G(s)\| \lambda^{s} ds \le \sum_{i=1}^{m} \|A_i\| \lambda^{-h_i}$$
$$+ h \sup_{s\in[-h,0]} \|G(s)\| \lambda^{-h} < 1, \forall t \in \mathbf{R}.$$

Do đó (20) kéo theo (iv) của Định lí 2.3. Vậy (iv) của Định lí 2.3 là một mở rộng của (20) cho phương trình sai phân phi tuyến phụ thuộc thời gian (1).

Nhận xét 2.7. Khi dấu "=" trong (4) xảy ra và $u_i(t,x,y) = v(t,x,y) = 0$, với mọi $t \in \mathbf{R}, x, y \in \mathbf{R}^n, i \in \underline{m}$ ta có kết quả của Định lí 2.3 đặc biệt hóa trở về kết quả trong ([6], Theorem 3]) cho tính ổn định mũ của hệ phương trình sai phân tuyến tính phụ thuộc thời gian

$$x(t) = \sum_{i=1}^{m} A_i(t) x(t-h_i) + \int_{-h}^{0} B(t,s)x(t+s)ds$$

Sau đây là một ví dụ đơn giản nhằm minh họa cho Định lí 2.3.

Ví dụ 2.8. Xét phương trình sai phân phi tuyến phụ thuộc thời gian trong $\mathbf{R}^2$

$$x(t)=f_1(t,x(t-h))+f_2(t,x(t-h))+\int_{-1}^{0} g(t,s,x(t+s))ds, t\ge 0, \tag{21}$$

trong đó, h là số thực dương cho trước $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbf{R}^2$, và các hàm $f_1(.;.), f_2(.;.) : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, g(\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbf{R}_+ \times [-1,0] \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ được xác định bởi

$$f_1(t,x) := \begin{pmatrix} \frac{1}{128}\sqrt{x_2^2+1} \\ \frac{x_1}{t^4-2t^2+6} + \frac{e^{-t^2}}{16} x_2 \end{pmatrix},$$
$$f_2(t,x) := \begin{pmatrix} \frac{1}{64}x_1 + a\sin(tx_2) \\ \frac{1}{16}x_2 + 2t \end{pmatrix},$$
$$g(t,s,x) := \begin{pmatrix} \frac{(s+2)}{32}x_1 + \sin(4t) \\ x_1 \sin(3-x_2) + \frac{e^{-x_2^2}}{16(t^2+1)} x_2 \end{pmatrix},$$

với a là hằng số, $t \in \mathbf{R}, s \in [-1,0]$. Ta thấy rằng các hàm $f_1(\cdot;\cdot), f_2(\cdot;\cdot)$ và $g(\cdot,\cdot,\cdot)$ là liên tục trên miền xác định của chúng. Hệ (21) là hệ phi tuyến và không có điểm cân bằng 0 nên hoàn toàn không thể áp dụng các kết quả trong ([6], Theorem 3]). Bằng một số biến đổi sơ cấp, ta có

$$|f_1(t,x)-f_1(t,y)| \le A_1(t)|x-y|, \forall t\in \mathrm{R}, x,y \in \mathrm{R}^2$$
$$|f_2(t,x)-f_2(t,y)| \le A_2(t)|x-y| + u(t,x,y), \forall t\in \mathrm{R}, x,y \in \mathrm{R}^2$$
$$|g(t,s,x)-g(t,s,y)| \le B(t,s)|x-y|, \forall t\in \mathrm{R}, s\in[-1,0], x,y \in \mathrm{R}^2$$

trong đó $A_1(t) := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{128} \\ \frac{1}{t^4-2t^2+6} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$, $A_2(t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{64} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$, $B(t,s) := \begin{pmatrix} \frac{s+2}{32} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16(t^2+1)} \end{pmatrix}$,

và $u(t,x,y) := \begin{pmatrix} a\sin(tx_2) - a\sin(ty_2) \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = (x_1, x_2)^T$, $y = (y_1, y_2)^T$, là hàm bị chặn.

Do đó, (4) được thỏa mãn. Mặt khác, ta có

$$A_1(t)+A_2(t)+\int_{-1}^{0}|B(t,s)|ds \le M$$
$$:= \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{128} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{16} \end{pmatrix} \text{ và } \rho(M)=\frac{1}{4}<1.$$

Áp dụng Định lí 2.3 (ii), ta suy ra (21) là ε-co nếu $a \neq 0$. Ngoài ra, nếu $a=0$ thì (21) là co.

TÍNH CHẤT ε-CO CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN CHỊU NHIỄU

Giả sử tất cả các giả thiết của Định lí 2.5 được thỏa mãn, khi đó (1) là ε-co. Cho các hàm $f_i(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot,\cdot)$ trong hệ phương trình (1) nhiễu phi tuyến như sau:

$$f_i(t,x) \to f_i(t,x)+f_i^*(t,x), t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n$$

$$g(t,s,x) \to g(t,s,x)+g^*(t,s,x), t\in\mathbf{R}, s\in[-h,0], x\in\mathbf{R}^n$$

trong đó, $f_i^*(;\cdot) \in C(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)\,(i\in\underline{m}), g^*(\cdot.\because;;;) \in C(\mathbf{R}\times[-h,0]\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$ là những hàm thay đổi có chứa các tham số. Khi đó, (1) trở thành hệ phương trình sai phân phi tuyến chịu nhiễu có dạng sau

$$x(t)=\sum_{i=1}^{m}\left[f_i(t,x(t-h_i))+f_i^*(t,x(t-h_i))\right]+ \int_{-h}^{0}\left[g(t,s,x(t+s))+g^*(t,s,x(t+s))\right]ds. \tag{22}$$

Trong mục này, ta giả sử rằng tồn tại $D_i \in \mathbf{R}_+^{n\times l_i}, E_i \in \mathbf{R}_+^{q_i\times n}, \Delta_i \in \mathbf{R}_+^{l_i\times q_i}, i\in\underline{m}$, và $D_{m+1}\in\mathbf{R}_+^{n\times l}, E_{m+1}\in\mathbf{R}_+^{q\times n}, \Delta_{m+1}(\cdot)\in C\left([-h,0],\mathbf{R}_+^{l\times q}\right)$ sao cho

$$(\mathrm{H}_1)\ |f_i^*(t,x)-f_i^*(t,y)| \le D_i\Delta_iE_i|x-y|,$$
$$\forall t\in\mathbf{R}, x,y\in\mathbf{R}^n, i\in\underline{m}.$$

$$(\mathrm{H}_2)\ |g^*(t,s,x)-g^*(t,s,y)|$$
$$\le D_{m+1}\Delta_{m+1}(s)E_{m+1}|x-y|,$$
$$\forall t\in\mathbf{R}, s\in[-h,0], x,y\in\mathbf{R}^n.$$

Bài toán. *Tìm số dương γ sao cho hệ chịu nhiễu (22) vẫn duy trì tính ε-co một khi độ lớn của các nhiễu nhỏ hơn γ. Số γ được gọi là biên co của hệ (22).*

Sau đây là kết quả mới về biên cho tính ε-co của hệ phương trình sai phân chịu nhiễu (22).

Định lí 3.1. *Giả sử (H_1), (H_2) và các giả thiết của Định lí 2.5 được thỏa mãn. Khi đó hệ chịu nhiễu (22) vẫn duy trì tính ε-co nếu*

$$\sum_{i=1}^{m}\|\Delta_i\|+\int_{-h}^{0}\|\Delta_{m+1}(s)\|ds < \frac{1}{\max_{i,j\in(1,2,\cdots,m+1)}\left\|E_i\left(I_n-\sum_{i=1}^{m}A_i-\int_{-h}^{0}G(s)ds\right)^{-1}D_j\right\|} \tag{23}$$

trong đó, $A_i\in\mathbf{R}_+^{n\times n}, i\in\underline{m}$ và $G(\cdot):[-h,0]\to\mathbf{R}_+^{n\times n}$ được xác định như trong Định lí 2.5.

Để chứng minh Định lí 3.1 ta có sử dụng tính chất sau đây của ma trận không âm.

Bổ đề 3.2 ([6, Theorem 1.1]). Cho ma trận $A\in\mathbf{R}_+^{n\times n}$. Khi đó,

(i) $\sigma(A)$ là một giá trị riêng của A và tồn tại $x\in\mathbf{R}_+^n, x\neq 0$ sao cho $Ax=\rho(A)x$.

(ii) $(tI_n-A)^{-1}$ tồn tại và không âm khi và chỉ khi $t>\sigma(A)$.

Chứng minh Định lí 3.1. Với mỗi $i\in\underline{m}$, ta có

$$|f_i(t,x)-f_i(t,y)|\le A_i|x-y|, |g(t,s,x)-g(t,s,y)|$$
$$\le G(s)|x-y|, \forall t\in\mathbb{R}, x,y\in\mathbb{R}^n, s\in[-h,0]$$

và $\rho\left(\sum_{i=1}^{m} A_i + \int_i^0 G(s)ds\right) < 1$. Do đó,
$\left|\left(f_i(t,x)+f_i^*(t,x)\right)-\left(f_i(t,y)+f_i^*(t,y)\right)\right| \le (A_i + D_i\Delta_i E_i)\,|x-y|, \forall t \in \mathbf{R}, x,y \in \mathbf{R}^n$,
$|(g(t,s,x)+g^*(t,s,x))-(g(t,s,y)+g^*(t,s,y)| \le (G(s)+D_{m+1}\Delta_{m+1}(s)E_{m+1})\,|x-y|$, với mọi
$t \in \mathbb{R}, x,y \in \mathbb{R}^n, s \in [-h,0]$.
Theo Định lí 2.5, (22) là ε-co nếu $\rho\left(\sum_{i=1}^{m}(A_i+D_i\Delta_i E_i)+\int_{-h}^{0}(G(s)+D_{m+1}\Delta_{m+1}(s)E_{m+1})ds\right)<1$,
hay $\rho\left(\sum_{i=1}^{m} A_i+\int_{-h}^{0} G(s)ds+\sum_{i=1}^{m} D_i\Delta_i E_i+D_{m+1}\int_{-h}^{0}\Delta_{m+1}(s)dsE_{m+1}\right)<1$.Chứng minh điều này bằng phương pháp phản chứng. Giả sử ngược lại rằng:

$$\rho_0{:=}\rho\left(\sum_{i=1}^{m} A_i+\int_{-h}^{0} G(s)ds+\sum_{i=1}^{m} D_i\Delta_i E_i+D_{m+1}\int_{-h}^{0}\Delta_{m+A}(s)dsE_{m+1}\right)\ge 1$$

Ta chứng minh:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\|\Delta_i\|+\int_{-h}^{0}\|\Delta_{m+1}(s)\|ds\\ &\ge \frac{1}{\max_{i,j\in\{1,2,\ldots,m+1\}}\left\|E_i\left(I_n-\sum_{i=1}^{m}A_i-\int_{-h}^{0}G(s)ds\right)^{-1}D_j\right\|}.\end{aligned} \tag{24}$$

Khi đó, (24) mâu thuẫn với giả thiết (23) đã cho. Thật vậy, theo Bổ đề 3.2 (i), tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}_+^n, x_0 \ne 0$ sao cho:

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{m} A_i+\int_{-h}^{0} G(s)ds+\sum_{i=1}^{m} D_i\Delta_i E_i+D_{m+1}\int_{-h}^{0}\Delta_{m+1}(s)dsE_{m+1}\right)x_0\\ &=\rho_0 x_0.\end{aligned} \tag{25}$$

Áp dụng Bổ đề 3.2 (ii), $\left(\rho_0 I_n - \sum_{i=1}^{m} A_i - \int_{-h}^{0} G(s)ds\right)^{-1}$ tồn tại và không âm. Từ (25) suy ra:

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{m} A_i+\int_{-h}^{0} G(s)ds+\sum_{i=1}^{m} D_i\Delta_i E_i+D_{m+1}\int_{-h}^{0}\Delta_{m+1}(s)dsE_{m+1}\right)<1$$

$$\sum_{i=1}^{m} D_i\Delta_i E_i x_0 + D_{m+1}\int_{-h}^{0}\Delta_{m+1}(s)dsE_{m+1}x_0 = \left(\rho_0 I_n - \sum_{i=1}^{m} A_i - \int_{-h}^{0} G(s)ds\right)x_0.$$

$$\left(\rho_0 I_n - \sum_{i=1}^{m} A_i - \int_{-h}^{0} G(s)ds\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m} D_i\Delta_i E_i x_0 + D_{m+1}\int_{-h}^{0}\Delta_{m+1}(s)dsE_{m+1}x_0\right) = x_0. \tag{26}$$

Gọi i_0 là chỉ số sao cho $\|E_{i_0}x_0\| = \max_{i\in\{1,2,\ldots,m+1\}}\|E_i x_0\|$. Khi đó $\|E_{i_0}x_0\| > 0$. Nhân hai vế của (26) với E_{i_0}, ta có:

$$\begin{aligned}&E_{i_0}\left(\rho_0 I_n - \sum_{i=1}^{m} A_i - \int_{-h}^{0} G(s)ds\right)^{-1}\\ &\left(\sum_{i=1}^{m} D_i\Delta_i E_i x_0 + D_{m+1}\int_{-h}^{0}\Delta_{m+1}(s)dsE_{m+1}x_0\right)\\ &= E_{i_0}x_0.\end{aligned} \tag{27}$$

Lấy chuẩn hai vế của (27), ta được:

$$\begin{aligned}&\left\|E_{i_0}\left(\rho_0 I_n - \sum_{i=1}^{m} A_i - \int_{-h}^{0} G(s)ds\right)^{-1}\right\|\\ &\left\|\sum_{i=1}^{m} D_i\Delta_i E_i x_0 + D_{m+1}\int_{-h}^{0}\Delta_{m+1}(s)dsE_{m+1}x_0\right\|\\ &\ge \|E_{i_0}x_0\|.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{m}\left\|E_{i_0}\left(\rho_0 I_n-\sum_{i=1}^{m}A_i-\int_{-h}^{0}G(s)ds\right)^{-1}D_i\right\|\|\Delta_i\|\|E_i x_0\|$$

$$+\left\|\sum_{i=1}^{m} E_{i_0}\left(\rho_0 I_n-\sum_{i=1}^{m} A_i-\int_{-h}^{0} G(s)ds\right)^{-1}\right.$$
$$D_{m+1}\|\int_{-h}^{0}\|\Delta_{m+1}(s)\|\,ds\,\|E_{m+1}x_0\|\geq\|E_{i_0}x_0\|$$

Do đó,

$$\max_{i,j\in[1,2,\ldots,n+1\}}\left\|E_i\left(\rho_0 I_n-\sum_{i=1}^{m} A_i-\int_{-h}^{0} G(s)ds\right)^{-1}\right.$$
$$\left.D_j\|\sum_{i=1}^{m}\|\Delta_i\|+\int_{-h}^{0}\|\Delta_{m+1}(s)\|\,ds\right)$$
$$\|E_{m+1}x_0\|\geq\|E_{i_0}x_0\|$$

hay

$$\max_{i,j\in\{1,2,\ldots,m+1\}}\left\|E_i\left(\rho_0 I_n-\sum_{i=1}^{m} A_i-\int_{-h}^{0} G(s)ds\right)^{-1}\right.$$
$$D_j\|\left(\sum_{i=1}^{m}\|\Delta_i\|+\int_{-h}^{0}\|\Delta_{m+1}(s)\|\,ds\right)\geq 1. \tag{28}$$

Mặt khác, vì $\rho_0\geq\rho\left(\sum_{i=1}^{m} A_i+\int_{-h}^{0} G(s)ds\right)>1$ nên theo Bổ đề 3.2 (ii) suy ra

$$\left(I_n-\sum_{i=1}^{m} A_i-\int_{-h}^{0} G(s)ds\right)^{-1}$$
$$\geq 0 \text{ và } \left(\rho_0 I_n-\sum_{i=1}^{m} A_i-\int_{-h}^{0} G(s)ds\right)^{-1}\geq 0.$$

Do đó, ta có

$$\left(I_n-\sum_{i=1}^{m} A_i-\int_{-h}^{0} G(s)ds\right)^{-1}$$
$$-\left(\rho_0 I_n-\sum_{i=1}^{m} A_i-\int_{-h}^{0} G(s)ds\right)^{-1}$$
$$=(\rho_0-1)\left(I_n-\sum_{i=1}^{m} A_i-\int_{-h}^{0} G(s)ds\right)^{-1}$$
$$\left(\rho_0 I_n-\sum_{i=1}^{m} A_i-\int_{-h}^{0} G(s)ds\right)^{-1}\geq 0$$

Suy ra $\left(I_n-\sum_{i=1}^{m} A_i-\int_{-h}^{0} G(s)ds\right)^{-1}\geq\left(\rho_0 I_n-\sum_{i=1}^{m} A_i-\int_{-h}^{0} G(s)ds\right)^{-1}\geq 0$. Khi đó,

$$E_i\left(I_n-\sum_{i=1}^{m} A_i-\int_{-h}^{0} G(s)ds\right)^{-1} D_j$$
$$\geq E_i\left(\rho_0 I_n-\sum_{i=1}^{m} A_i-\int_{-h}^{0} G(s)ds\right)^{-1} D_j,\forall i,j\in m+1$$

Suy ra

$$\left\|E_i\left(I_n-\sum_{i=1}^{m} A_i-\int_{-h}^{0} G(s)ds\right)^{-1} D_j\right\|$$
$$\geq\left\|E_i\left(\rho_0 I_n-\sum_{i=1}^{m} A_i-\int_{-h}^{0} G(s)ds\right)^{-1} D_j\right\|$$
$$\geq 0\forall i,j\in m+1. \tag{29}$$

Từ (28)-(29) suy ra

$$\sum_{i=1}^{m} \|\Delta_i\| + \int_{-h}^{0} \|\Delta_{n+1}(s)\| \, ds$$

$$\geq \frac{1}{\max\limits_{i,j\in[2,\ldots m+n+1)} \left\| E_i \left(\rho_0 I_n - \sum_{i=1}^{m} A_i - \int_{-h}^{0} G(s)ds \right)^{-1} D_j \right\|}$$

hay

$$\sum_{i=1}^{m} \|\Delta_i\| + \int_{-h}^{0} \|\Delta_{m+1}(s)\| \, ds$$

$$\geq \frac{1}{\max\limits_{i,j\in[2,\ldots m+n+1} \left\| E_i \left(I_n - \sum_{i=1}^{m} A_i - \int_{-h}^{0} G(s)ds \right)^{-1} D_j \right\|}$$

Điều này mâu thuẫn với (23). Vậy $\rho(\sum_{i=1}^{m} A_i + \int_{-h}^{0} G(s)ds + \sum_{i=1}^{m} D_i\Delta_i E_i + D_{m+1} \int_{-h}^{0} \Delta_{m+1}(s) ds E_{m+1}) < 1$. Khi đó, theo Định lí 2.5, (22) là ε-co. Định lí 3.1 được chứng minh.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu được tài trợ bởi Trường Đại học Công nghệ Thông tin, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh (ĐHQG-HCM) trong khuôn khổ Đề tài mã số D1-2018-01.

XUNG ĐỘT LỢI ÍCH

Nhóm tác giả xin cam kết không xung đột và mâu thuẫn về lợi ích ấn phẩm khoa học.

ĐÓNG GÓP CỦA CÁC TÁC GIẢ

Đây là ấn phẩm khoa học mà các tác giả có đóng góp như nhau.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Niculescu SI. Delay effects on stability: A robust control approach. In: Lecture Notes in Control and Information Sciences. vol. 269. London, UK: Springer; 2001. Lecture Notes in Control and Information Sciences.
2. Melchor-Aguilar D. Exponential stability of some linear continuous time difference systems. Systems & Control Letters. 2012;61(1):62–68.
3. Melchor-Aguilar D. Further results on exponential stability of linear continuous time difference systems. Applied Mathematics and Computation. 2013;219:10025–10032.
4. Melchor-Aguilar D. Exponential stability of linear continuous time difference systems with multiple delays. Systems & Control Letters. 2013;62:811–818.
5. Ngoc PHA, Hieu LT. New criteria for exponential stability of nonlinear difference systems with time-varying delay. International Journal of Control. 2013;86(9):1646–1651.
6. Ngoc PHA, Huy ND. Exponential stability of linear delay difference equations with continuous time. Vietnam Journal of Mathematics. 2014;43(2):195–205.
7. Ngoc PHA, Hieu T, Hieu LT, Huy ND. On contraction of nonlinear difference systems with time-varying delays. Mathematische Nachrichten. 2018;.
8. Lohmiller W, Slotine JJE. On contraction analysis for nonlinear systems. Automatica. 1998;34:683–696.
9. Aminzare Z, Sontag ED. Contraction methods for nonlinear systems: A brief introduction and some open problems. Proceedings of 53rd IEEE Conference on Decision and Control. 2015;p. 3835–3847.
10. Ngoc PHA, Hiêu T. On contraction of functional differential equations. SIAM Journal on Control and Optimization. 2018;56(3):2377–2397.

Science & Technology Development Journal – Natural Sciences, 3(3):213-224

Open Access Full Text Article

Research Article

New sufficient criteria for epsilon-contraction of a class of nonlinear diference system with continuous time

Dang Le Thuy[1], Cao Thanh Tinh[1,*], Le Trung Hieu[2], Le Huynh My Van[1]

Use your smartphone to scan this QR code and download this article

ABSTRACT

Contraction property of dynamical systems, especially difference systems, is one of the qualitative properties which have attracted much attention from many researchers for recent decades. Contraction of dynamical systems has many practical applications which means that two trajectories of the system convergence to each other when the time reaches to positive infinity. In this paper, by improving some existing approaches, we present a new approach to contraction problem of a class of nonlinear time-varying delay difference system with continuous time. We generalize the definition of contraction to -contraction. Then, we give some new explicit sufficient criteria for -contraction and global exponential stability of the mentioned system. Furthermore, we investigate-contraction of perturbed difference systems with continuous time under nonlinear perturbations in which perturbations are general time-varying functions. Then we obtain a new explicit-contraction bound for such systems subject to nonlinear time-varying perturbations. The obtained theorems generalize some existing results in the literature as particular cases. An example is given to illustrate the obtained results.

Key words: contraction bound, contraction, exponential stability, perturbed systems, difference systems with continuous time

[1]*University of Information Technology, VNUHCM*

[2]*Dong Thap University*

Correspondence

Cao Thanh Tinh, University of Information Technology, VNUHCM

Email: tinhct@uit.edu.vn

History

- Received: 20-12-2018
- Accepted: 29-7-2019
- Published: 31-9-2019

DOI : 10.32508/stdjns.v3i3.649

Cite this article : Thuy D L, Tinh C T, Hieu L T, Van L H M. **New sufficient criteria for epsilon-contraction of a class of nonlinear diference system with continuous time**. *Sci. Tech. Dev. J. - Nat. Sci.;* 3(3):213-224.