

Ứng xử uốn của tấm sandwich vật liệu chức năng rỗng chịu ảnh hưởng bởi sự phân bố nhiệt phi tuyến sử dụng lý thuyết zig–zag giả 3D kết hợp với hàm cơ sở NURBS

Đỗ Nguyễn Văn Vương^{1,*}, Võ Đức Cẩm Hải^{2,3}



Use your smartphone to scan this QR code and download this article

¹Nhóm nghiên cứu ứng dụng tính toán kết cấu và xây dựng, Khoa Kỹ Thuật công trình, Trường Đại học Tôn Đức Thắng, Thành Phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

²Bộ môn Ứng dụng Tin học, Khoa Toán Tin học, Trường Đại học Khoa học tự nhiên, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

³Đại học Quốc gia, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Liên hệ

Đỗ Nguyễn Văn Vương, Nhóm nghiên cứu ứng dụng tính toán kết cấu và xây dựng, Khoa Kỹ Thuật công trình, Trường Đại học Tôn Đức Thắng, Thành Phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Email: donguyenvanvuong@tdtu.edu.vn

Lịch sử

- Ngày nhận: 23-12-2024
- Ngày sửa đổi: 13-03-2025
- Ngày chấp nhận: 12-08-2025
- Ngày đăng: 30-09-2025

DOI :

<https://doi.org/10.32508/stdjns.v9i3.1428>



Bản quyền

© ĐHQG Tp.HCM. Đây là bài báo công bố mở được phát hành theo các điều khoản của the Creative Commons Attribution 4.0 International license.



TÓM TẮT

Với các tính chất cơ học đặc biệt, vật liệu phân cấp chức năng (functionally graded material, FGM) được đánh giá là một trong số các vật liệu gia cố thu hút nhất cho các ứng dụng trong ngành công nghiệp. Bài báo này trình bày việc xử lý uốn của các tấm dày phân cấp chức năng sandwich hình chữ nhật, có xét đến hệ số rỗng, và dựa trên lý thuyết gần đúng biến dạng cắt zig–zag 3D được đề xuất. Trong lý thuyết này hai hàm, $f(z)$ và $g(z)$ được đưa vào phân tích, trong đó lần lượt là các hàm biểu diễn biến dạng cắt bậc cao và biến dạng qua độ dày của tấm FGM. Thêm vào, trường ứng suất cắt ngang đã được vào tích hợp vào lý thuyết giả 3D để đảm bảo thỏa các điều kiện tương thích ứng suất cắt giữa các lớp vật liệu mà ở đó có thể giải quyết những thách thức bất liên tục trong việc phân tích uốn nhiệt của các tấm FG dày. Thông qua lời giải chính xác, các phân tích ứng xử của kết cấu tấm sử dụng nhiều mô hình khác nhau, bao gồm các phương pháp phân tích bậc cao, được sử dụng để đánh giá hiệu suất của mô hình zig–zag 3D mới. Từ nguyên lý Hamilton, các phương trình cân bằng cho các tấm sandwich FG rỗng được xây dựng. Kết quả từ lý thuyết đã chứng minh rằng mô hình đề xuất mang lại các phỏng đoán đầy hứa hẹn cho các tấm Sandwich dày, đạt được độ chính xác cao khi so sánh với lời giải giải tích và lời giải chính xác. Hơn nữa, các ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích gốm và kim loại, tỷ lệ cạnh, tỷ lệ chiều dài trên bề dày, điều kiện biên, phân phối nhiệt độ tuyến tính và phi tuyến tính tổng quát trên độ dày tấm đối với phản ứng uốn cơ nhiệt của tấm FG đã được nghiên cứu chi tiết. Trên cơ sở này, phương pháp zig–zag giả 3D có thể được xem là một giải pháp tiềm năng để đánh giá chính xác ứng xử của các kết cấu Sandwich dưới tác dụng tải nhiệt phân bố đều, sự khuếch tán nhiệt độ qua bề dày, từ đó có thể ứng dụng tốt đối với các bài toán công nghiệp trong thực tế.

Từ khóa: Vật liệu chức năng, uốn nhiệt, lý thuyết zig–zag giả 3D, cơ sở NURBS, phân bố nhiệt phi tuyến

MỞ ĐẦU

Vật liệu phân loại theo chức năng (functionally graded material, FGM), có các đặc tính thay đổi theo không gian, đã được cải tiến với các thành phần độc đáo thay đổi liên tục thông qua bề dày. Như đã biết, vật liệu FGM đầu tiên đã được các nhà khoa học Nhật Bản giới thiệu trong bốn thập kỷ qua như vật liệu chịu nhiệt độ cực cao cho các ứng dụng hàng không vũ trụ 1. FGM đã được chấp nhận rộng rãi trong ngành hàng không vũ trụ và nhiều ngành công nghiệp khác, bao gồm các ứng dụng trong máy bay, phương tiện vũ trụ, tàu, thuyền, container chở hàng và các tòa nhà dân cư v.v. 2. FGM là vật liệu đồng nhất có các tính chất thay đổi liên tục từ điểm này sang điểm khác bằng cách thay đổi tỷ lệ thể tích của các thành phần, chẳng hạn như gốm và kim loại, theo cách được xác định trước. Trong khi các FGM đơn giản nhất liên quan đến quá trình chuyển đổi dần dần giữa hai vật liệu, thì sự phân

cấp từng bước là điển hình. Các FGM quen thuộc nhất được phân loại theo thành phần, từ gốm chịu lửa đến kim loại. Đặc biệt hơn, cấu trúc sandwich ba lớp là một trong những dạng cấu trúc composite linh hoạt và hiệu quả nhất được phát triển trong ngành công nghiệp composite. Cấu trúc nhiều lớp chuyên dụng của FGM bao gồm hai tấm mặt mỏng, cứng và chắc chắn được ngăn cách bởi một vật liệu lõi tương đối dày, nhẹ và linh hoạt. Các cấu trúc sandwich hiện đại thường sử dụng vật liệu composite nhiều lớp hoặc kim loại cho các tấm mặt và lõi tổ ong cường độ thấp hoặc bọt polyme làm lõi linh hoạt 2. Mặc dù các cấu trúc này đã cung cấp hiệu quả cấu trúc cao, nhưng nhu cầu ngày càng cao của việc cải thiện hiệu suất càng thúc đẩy sự phát triển trong việc ứng dụng các vật liệu tiên tiến, chẳng hạn vật liệu phân loại chức năng (FGM) 3-4. Việc sử dụng phân cấp của vật liệu FGM có thể loại bỏ các vấn đề về bất liên tục qua các lớp sandwich và đảm bảo phân phối ứng suất trơn tru. Tuy

Trích dẫn bài báo này: Văn Vương D N, Cẩm Hải V D. Ứng xử uốn của tấm sandwich vật liệu chức năng rỗng chịu ảnh hưởng bởi sự phân bố nhiệt phi tuyến sử dụng lý thuyết zig–zag giả 3D kết hợp với hàm cơ sở NURBS. *Sci. Tech. Dev. J. - Nat. Sci.* 2025; 9(3):3452-3465.

nhiên, trong quá trình sản xuất các cấu trúc Sandwich FGM này, các lỗ rỗng có thể hình thành trong vật liệu trong quá trình gia nhiệt. Điều này xảy ra do sự khác biệt đáng kể về nhiệt độ ngưng tụ giữa các thành phần của vật liệu, và thậm chí tại các mặt tiếp xúc của các lớp vật liệu Sandwich. Wattanasakulpong et al.⁵ đã nghiên cứu các lỗ rỗng trong các mẫu FGM được sản xuất bằng kỹ thuật lọc tuần tự nhiều giai đoạn. Do đó, điều quan trọng là phải xem xét các tác động của độ rỗng khi thiết kế các thành phần (FG) chịu tải trọng nhiệt và dao động hoặc tải trọng bất kỳ, do đó các yếu tố độ rỗng này ảnh hưởng đáng kể đến ứng xử và độ bền của các kết cấu Sandwich.

Thông qua các tài liệu, các nhà nghiên cứu dành nhiều quan tâm đặc biệt trong việc tìm hiểu vật liệu FGM và phân tích các lỗ rỗng bên trong. Nhiều nghiên cứu lý thuyết và số đã khám phá các phản ứng uốn cơ học, uốn nhiệt và mất ổn định của các cấu trúc FGM composite nhiều lớp FGM^{6,7}. Các nghiên cứu này đã tính toán về ứng xử uốn nhiệt, rung động và uốn cong trong các cấu trúc lỗ rỗng FG và sự lan truyền sóng trong các cấu trúc nano⁸⁻¹¹. Karami và cộng sự¹² sử dụng lý thuyết tấm đơn giản để phát triển các công thức trường nhiệt cho các tấm uốn nhiệt đàn hồi rỗng. Neves và cộng sự¹³ đã tiến hành các phân tích sử dụng các lý thuyết giả 3D để phân tích rung động tĩnh và tự do của các tấm phân loại chức năng bằng phương pháp giải tích Navier. Karami và cộng sự¹⁴ đã tiếp tục bổ sung nghiên cứu với đánh giá vật liệu rỗng phân loại chức năng cho tấm lan truyền sóng dưới điều kiện biên ngàm. Wang và cộng sự¹⁵ đã khám phá ảnh hưởng của độ rỗng và sự chuyển động trong môi trường nhiệt để nghiên cứu độ rung của các tấm FGM với nhiều mẫu phân bố độ rỗng khác nhau bằng cách sử dụng phương pháp Galerkin và các kỹ thuật thích ứng Runge-Kutta. Tương tự, Chen và cộng sự¹⁶ trình bày các ứng xử rung động cưỡng bức tự do và dao động điều hòa của dầm trong việc sử dụng các lý thuyết dầm Timoshenko, phương pháp Newmark-beta, các hàm thử nghiệm Ritz để thu được độ lệch dao động tạm thời và tần số riêng trong các điều kiện tải khác nhau. Qi và cộng sự³ đã đưa ra phương trình tổng quát của các hàm vi phân bậc hai để phân tích các phản ứng tĩnh và động của các tấm FGM bằng phương pháp phần tử hữu hạn biên tỉ lệ ảo với nhiều mô hình khác nhau bằng cách sử dụng lý thuyết hai chiều. Cùng thời điểm đó, Liu và cộng sự⁴ nghiên cứu dầm ngàm vật liệu Sandwich FG có lỗ rỗng để phân tích sự kết hợp giữa uốn cơ học và uốn nhiệt bằng cách sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) và phương pháp xấp xỉ mặt phẳng trung hòa.

Vì sự khác biệt rõ rệt về tính chất vật liệu tại các mặt tiếp xúc giữa các lớp sandwich do các lỗ rỗng tạo ra bên trong vật liệu trong quá trình sản xuất¹ hoặc theo thiết kế với các mô hình lỗ rỗng khác nhau để làm cho vật liệu nhẹ hơn trong các ứng dụng sinh học¹⁷ tạo ra sự khác biệt về ứng suất trên các lớp vật liệu, do đó việc đánh giá ứng suất cắt ngang thông qua các mặt tiếp xúc đóng vai trò quan trọng trong việc phân tích chính xác ứng xử uốn nhiệt của các kết cấu tấm, vỏ dầy sử dụng vật liệu FG. Rõ ràng, nếu ứng suất cắt giữa các lớp không thể được mô tả chính xác, việc phân tích phân bố nhiệt độ dọc theo độ dày tấm của các cấu trúc FG sẽ gặp phải những thách thức nghiêm trọng bởi độ chính xác trong các bài toán ứng dụng công nghiệp như đã nêu trên.

Một số lý thuyết về tấm, bao gồm lý thuyết tấm cổ điển (CPT), lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT), lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT)^{18,19}, phần tử vỏ tổng quát 3-D²⁰, đã được sử dụng rộng rãi trong phân tích nhiệt cơ học đối với vật liệu FGM. Tuy nhiên, có thể thấy rằng các lý thuyết thông thường như CPT, FSDT, HSDT²¹ có thể không dự đoán chính xác ứng xử của các tấm sandwich chịu nhiều loại tải khác nhau, điều này được lý giải bởi sự không liên tục trong

ứng suất cắt tại các bề mặt tiếp xúc giữa các lớp sandwich. Điều này được tìm thấy bởi vì, do bản chất phân lớp của các kết cấu tấm, vỏ sandwich FGM, nên các đặc tính vật liệu do sự biến đổi lỗ rỗng phân bố không liên tục qua từng lớp của các kết cấu tấm và vỏ này, dẫn đến sự khác biệt không liên tục về ứng suất dọc trục và ứng suất cắt tại các bề mặt tiếp xúc giữa các lớp tấm sandwich²². Do đó, để phân tích chính xác ứng xử của các loại tấm sandwich này dưới tác động của tải nhiệt phân bố đều và các biến đổi nhiệt độ qua độ dày của tấm, cần xây dựng một mô hình hiệu quả để phân tích nhiệt của các cấu trúc vật liệu sandwich FG này đối với các điều kiện liên tục giải quyết các vấn đề về ứng suất cắt qua các lớp. Ngược lại, các lý thuyết trước đây hầu như không thỏa mãn, điều này có thể dẫn đến kết quả không chính xác và không thực tế.

Trong bài báo này, một mô hình tấm tiên tiến đáp ứng các điều kiện liên tục ứng suất giữa các lớp cần được đề xuất để phân tích biến dạng nhiệt đàn hồi của các tấm nhiều lớp FGM dày. Cụ thể, một mô hình zig-zag 3D gần đúng xem xét cả hiệu ứng kéo giãn qua bề dày và tính liên tục của ứng suất cắt trên các lớp sandwich được chỉ ra trong nghiên cứu này. Mô hình lý thuyết này bao gồm bảy biến được xem như các chuyển vị độc lập để mô tả ứng xử uốn do nhiệt độ gây ra trên các cấu trúc tấm sandwich. Các đặc điểm lý thuyết mới luôn đáp ứng điều kiện không có lực kéo trên biên, có nghĩa là không tồn tại ứng suất cắt ở mặt trên và mặt dưới của tấm. Ngoài ra, phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên cơ sở NURBS cũng được đề xuất trong nghiên cứu này để phân tích ứng xử uốn nhiệt của các tấm sandwich FGM dày. Có thể thấy rằng mô hình zig-zag giả 3D có khả năng đạt được các kết quả phân tích tuyệt vời khi so sánh với lời giải chính xác giả 3D theo phương pháp giải tích và các phương pháp uy tín khác được công bố trước đây. Phương pháp này cũng giải quyết tính liên tục của ứng suất cắt trên các lớp sandwich FGM. Ở đây, trường nhiệt độ tổng quát được sử dụng có phạm vi từ tuyến tính đến phi tuyến, các công thức chung của độ võng, ứng suất cắt và ứng suất dọc trục tương ứng được tính toán trong nghiên cứu này đã được chuẩn hóa không có thứ nguyên của tấm sandwich FGM. Các ví dụ số minh họa độ chính xác và hiệu suất của lý thuyết hiện tại bằng cách so sánh các kết quả thu được với các kết quả được tính toán bởi các lý thuyết khác nhau. Kết quả số cho thấy mô hình đề xuất có khả năng tính toán uốn nhiệt cho các tấm sandwich nhiều lớp có lỗ rỗng. Cuối cùng, các nghiên cứu tham số thông qua hệ số thể tích, tỷ lệ chiều dài trên chiều dày, các thông số hình học của tấm, phân phối nhiệt tuyến tính và phi tuyến tính qua độ dày đã được đánh giá một cách chi tiết, từ đó có thể hiểu rõ hơn về tác động của các tham số này trên ứng xử uốn nhiệt của tấm sandwich FGM.

LÝ THUYẾT ZIG-ZAG GIẢ 3D CHO TẤM SANDWICH FGM RỖNG

Trường chuyển vị

Tấm sandwich hình chữ nhật điển hình được tạo từ vật liệu chức năng FGM với hệ tọa độ Descartes (x, y, z) được xây dựng qua mặt phẳng giữa $z = 0$ có lỗ rỗng theo bề dày. Vật liệu chức năng FGM là hỗn hợp của kim loại và gốm mà trong đó vật liệu này được cấu tạo từ gốm nguyên chất ở bề mặt, trong khi kim loại nguyên chất ở bề mặt kia, và hai vật liệu này có sự pha trộn giữa chúng để tạo nên cường độ biến thiên liên tục thông qua bề dày. Hệ số lỗ rỗng trên tấm chữ nhật được mô tả chi tiết thông qua công thức lũy thừa đơn giản, thể hiện mối tương quan của sự phụ thuộc mô đun chịu kéo với sự thay đổi lỗ rỗng trong vật liệu được biểu diễn bởi công thức²:

$$E = E_0 e^{-\frac{2\alpha}{1-\alpha}}$$

trong đó Mo-đun đàn hồi E trọng trung cho mô đun

kéo có hiệu và E_0 là mô đun ban đầu của vật liệu đồng nhất. Sự thay đổi của mô đun có hiệu được biểu diễn thông qua hệ số lỗ rỗng, trong đó hệ số $\alpha = 0$ sẽ cho thấy vật liệu không tồn tại lỗ rỗng và $\alpha = 1$ khi vật liệu hoàn toàn bị hỏng, điều này có nghĩa là mô đun kéo có hiệu $E = 0$.

Trường chuyển vị được xem xét trong nghiên cứu này thông qua sự kết hợp của lý thuyết bậc cao có xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng kéo dãn và sự kết hợp của lý thuyết zig-zag để vượt qua sự bất liên tục của ứng suất cắt tại các lớp của tấm FG Sandwich²⁷. Do đó công thức được biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + (f(z) - z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} + \kappa^k(z) u_z(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + (f(z) - z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\ &\quad + \lambda^k(z) v_z(x, y) \left(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z) \varphi(x, y)$$

Trong khuôn khổ của các lý thuyết về tấm biến dạng cắt bậc cao, các chuyển vị $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ và $w(x, y, z)$ của một điểm đang xét trên tấm chức năng (FG) sandwich lần lượt dọc theo các hướng x , y và z tương ứng, trong khi các đạo hàm $w_{b,x}(x, y)$, $w_{s,x}(x, y)$ và $w_{b,y}(x, y)$, $w_{s,y}(x, y)$ được xác định là phép quay quanh theo các trục y và x , tương ứng. u_z, v_z là hàm biên độ để đánh giá tính liên tục qua các lớp sandwich.

Các hàm $\kappa^k(z)$ và $\lambda^k(z)$ được biểu diễn quan đến chuyển vị lần lượt tại mặt tiếp xúc giữa các lớp sandwich $\tilde{u}^k$ và $\tilde{v}^k$ ($k=1, 2, 3 \dots N$).

$$\begin{aligned} \kappa^k(z) &= f(z) \varphi^k \\ \lambda^k(z) &= f(z) \gamma^k \end{aligned} \quad (2)$$

Trong khi đó, biểu thức của hàm φ^k và γ^k có thể được diễn tả trên mối quan hệ của:

$$\begin{aligned} \varphi^k(z) &= 0.5(1 - \zeta_k) \tilde{u}^k + 0.5(1 + \zeta_k) \tilde{u}^{k+1} \\ \gamma^k(z) &= 0.5(1 - \zeta_k) \tilde{v}^k + 0.5(1 + \zeta_k) \tilde{v}^{k+1} \end{aligned} \quad (3)$$

trong đó $\tilde{u}^k$ and $\tilde{v}^k$ là các chuyển vị tại mặt tiếp xúc ($k=1, 2, 3, \dots N$), $\zeta_k \in [-1, 1]$.

Sự phụ thuộc zig-zag có thể được xác định bởi các điều kiện biên liên tục bắt buộc tại mỗi lớp sandwich thông qua công thức (4):

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xz}^k(z, y, z_{k+1}) &= \bar{\tau}_{xz}^{k+1}(z, y, z_{k+1}) \\ \bar{\tau}_{yz}^k(z, y, z_{k+1}) &= \bar{\tau}_{yz}^{k+1}(z, y, z_{k+1}) \end{aligned} \quad (4)$$

Có thể thấy rằng, từ Phương trình Eq. (4), tồn tại 2(N-1) các phương trình về điều kiện chuyển vị giữa các lớp Sandwich; trong khi đó bốn điều kiện có thể xem xét khi ứng suất kéo trên bề mặt tấm Sandwich ở phía bên trên và dưới của tấm được thể hiện theo công thức (5):

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xz}^k(z, y, \pm \frac{h}{2}) &= 0 \\ \bar{\tau}_{yz}^k(z, y, \pm \frac{h}{2}) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Trường chuyển vị bậc cao kết hợp với hàm hình dạng $f(z) = \frac{h}{\pi \sin(\frac{\pi z}{h-z})}$, trong khi hàm $g(z)$ được định nghĩa bởi, $g(z) = \cos(\frac{\pi z}{h})$.

Đối với sự phân bố ngang của biến dạng cắt hoặc ứng suất dọc trục của các lý thuyết tấm sẽ được đề xuất để cải thiện những hạn chế của các lý thuyết cổ điển khi không sử dụng hệ số biến dạng cắt cắt trên toàn bộ độ dày của tấm. Phương trình mối quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị có thể được biểu diễn bởi công thức (6):

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \quad \varepsilon_{zz}\}^T \\ &= \varepsilon^0 + z\varepsilon^1 + (f(z) - z)\varepsilon^2 \\ &\quad + g'(z)\varepsilon^3 + \varepsilon^4 - \varepsilon^{th} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \{\gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^T = f'(z)\varepsilon^{s-1} + g(z)\varepsilon^{s-2} \\ &\quad + \{\theta'^k(z)u_z \quad \kappa'^k(z)v_z\}^T \end{aligned}$$

Trong đó, $f'(z)$ là đạo hàm của hàm dạng $f(z)$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^0 + z\varepsilon_{xx}^1 + (f(z) - z)\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xx}^4 \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{yy}^0 + z\varepsilon_{yy}^1 + (f(z) - z)\varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{yy}^4 \\ \varepsilon_{zz} &= g'(z)\varepsilon_{zz}^3 \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy}^0 + z\varepsilon_{xy}^1 + (f(z) - z)\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xy}^{41} + \varepsilon_{xy}^{42} \\ \varepsilon_{zx} &= f'(z)\gamma_{zx}^4 + g(z)\gamma_{zx}^5 + \frac{\partial \kappa^k}{\partial z} \gamma_{zx}^6 \\ \varepsilon_{zy} &= f'(z)\gamma_{zy}^4 + g(z)\gamma_{zy}^5 + \frac{\partial \lambda^k}{\partial z} \gamma_{zy}^6 \end{aligned}$$

và các biến dạng nhiệt phụ thuộc vào sự thay đổi nhiệt độ ΔT được biểu thị như sau:

$$\varepsilon^{th} = \alpha(z)T\{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T \quad (7)$$

Trong đó $\alpha(z)$ là hệ số giãn nở vì nhiệt và được tính theo quy tắc hỗn hợp.

Đối với các tấm Sandwich vật liệu FGM có k lớp, mối quan hệ ứng suất-biến dạng đối với trạng thái ứng suất phẳng bao gồm ảnh hưởng của hiệu ứng nhiệt có thể được biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} &= \begin{Bmatrix} Q_{11}(z) & Q_{12}(z) & Q_{13}(z) & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12}(z) & Q_{22}(z) & Q_{23}(z) & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13}(z) & Q_{23}(z) & Q_{33}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44}(z) \end{Bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} - \begin{Bmatrix} \alpha(z) \\ \alpha(z) \\ \alpha(z) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^{(k)} T(z) \end{aligned} \quad (8)$$

Trong đó $Q_{ij}^{(k)}(z)$ là hệ số độ cứng của ứng suất phẳng, được biểu diễn theo công thức (9):

$$\begin{aligned} Q_{11}^{(k)}(z) &= Q_{22}^{(k)}(z) = Q_{33}^{(k)}(z) = \frac{E^{(k)}(z)}{1 - \nu^{(k)}(z)^2} \\ Q_{12}^{(k)}(z) &= Q_{13}^{(k)}(z) = Q_{23}^{(k)}(z) = \frac{\nu^{(k)}(z)E^{(k)}(z)}{1 - \nu^{(k)}(z)^2} \\ Q_{44}^{(k)}(z) &= Q_{55}^{(k)}(z) = Q_{66}^{(k)}(z) = \frac{E^{(k)}(z)}{2(1 + \nu^{(k)}(z))} \end{aligned} \quad (9)$$

Trong đó, hệ số Poisson $\nu^{(k)}(z)$ của vật liệu FGM, Modun đàn hồi $E^{(k)}(z)$ được tính toán ở lớp thứ k^{th} theo phương trình.

Trường nhiệt tổng quát $\theta(z)$ thay đổi theo độ dày của tấm có thể được thể hiện theo (10):

$$\theta(x, y, z) = \theta_1(x, y) + \frac{z}{h}\theta_2(x, y) + \frac{\psi(z)}{h}\theta_3(x, y) \quad (10)$$

Trong đó θ_1 , θ_2 , θ_3 là các nhiệt độ.

Chú ý rằng hàm số $\psi(z)$ biểu diễn thành phần phi tuyến của trường nhiệt và hàm này hoàn toàn độc lập với hàm dạng của trường chuyển vị, và vec tơ nhiệt độ phân bố theo bề dày có thể được viết theo công thức (11):

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_1 + \frac{z}{h}\bar{\theta}_2 + \frac{\psi(z)}{h}\bar{\theta}_3 \quad (11)$$

Mô hình vật liệu

Tấm sandwich FGM thông thường bao gồm ba lớp trong đó có lớp lõi nằm ở giữa và hai lớp vỏ bên ngoài. Chiều dài, chiều rộng và bề dày được định nghĩa tương ứng theo cách thức a , b và h , được xét trong hệ trục tọa độ Descartes (x, y, z) và thiết lập trên mặt phẳng giữa $(z = 0)$. Hai loại tấm sandwich FGM được chọn trong nghiên cứu này, tức là tấm sandwich có hai lớp vỏ là FGM và lớp lõi đồng nhất đẳng hướng được định nghĩa (loại A), và ngược lại (loại B) với lõi là FGM và lớp vỏ lần lượt là vật liệu đồng nhất của gốm và kim loại. h_t , h_c and h_b biểu thị độ dày tương ứng của lớp trên, lớp lõi và lớp dưới. Đối với tấm sandwich loại A và B, các mô hình lớp theo bề dày

đều được phân bố như sau (1-0-1), (1-1-1), (1-2-1), (2-1-2), (2-2-1) tương ứng với mô hình 1,2,3,4,5.

Tiếp theo, xem xét vật liệu FGM không đồng nhất có sự xuất hiện của các lỗ rỗng bên trong, phân bố theo hàm thể tích độ rỗng thông qua hệ số rỗng ($0 \leq \alpha < 1$). Theo cách như vậy, các tính chất có hiệu của vật liệu, như mô đun đàn hồi E của lớp vật liệu chức năng FGM, có thể được biểu diễn bởi công thức (12):

$$E^{(k)} = E_m \left(1 - V^{(k)} - \frac{\alpha}{2} \right) + E_c \left(V^{(k)} - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (12)$$

Trong đó k biểu thị lớp thứ k của tấm sandwich FGM. Thể tích gồm V_c của tấm sandwich loại A được cho là chỉ thay đổi theo hướng độ dày z , với luật phân phối lũy thừa đơn giản được thiết lập bởi công thức (13):

$$\begin{aligned} V_c^{(1)}(z) &= \left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \right)^n, h \in \left[-\frac{h}{2}, z_2 \right], \text{Lớp dưới} \\ V_c^{(2)}(z) &= 1, h \in [z_2, z_3], \text{Lõi} \\ V_c^{(3)}(z) &= \left(\frac{z_4-z}{z_4-z_3} \right)^n, h \in \left[z_3, \frac{h}{2} \right], \text{Lớp trên} \end{aligned} \quad (13)$$

Trong đó n ($0 \leq n \leq \infty$) là chỉ số lũy thừa thể hiện sự thay đổi của phần thể tích gồm qua bề dày tấm. Ở tấm trên cùng, các thành phần vật liệu được thay đổi từ bề mặt kim loại ($z = z_4$) đến bề mặt gốm ($z = z_3$) và ngược lại, bề mặt gốm ($z = z_2$) đến bề mặt kim loại ($z = z_1$) cho tấm bên dưới. Chỉ số độ dày của từng lớp theo ký tự của đáy-lõi-đỉnh ($h_b - h_c - h_t$) sau đây được chỉ ra bằng các tỷ lệ khác nhau như “1-1-1”, “2-1-1”, v.v. Ví dụ, “1-1-1” có nghĩa là độ dày của ba lớp giống hệt nhau. Và, thể tích của gồm của tấm Sandwich loại B

$$\begin{aligned} V^{(3)} &= 1, z \in [h_3, h_4] \\ V_c(z) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{z_c}{h_c} \right)^n, z \in [h_2, h_3] \\ V^{(1)} &= 0, z \in [h_1, h_2] \end{aligned} \quad (14)$$

Trong đó $z_c \in [z_2, z_3]$ và độ dày của lõi, $h_c = z_3 - z_2$. Trong nghiên cứu này, vật liệu rỗng FG là được phối hỗn hợp của Titan (Ti-6Al-4V) và Zirconia (ZrO₂), trong đó các đặc tính cơ lý của vật liệu của chức năng được thể hiện trong Bảng 1.

Nguyên lý công ảo

Nguyên lý Hamilton được sử dụng trong nghiên cứu này để suy ra phương trình cân bằng tổng quát trong phân tích ứng xử uốn của tấm sandwich rỗng đối với các tải trọng nhiệt như sau:

$$\int_0^t (\delta U + \delta V) dt = 0 \quad (15)$$

Phương trình (15) có tổng năng lượng như sau:

$$\Pi = U + V \quad (16)$$

Trong đó δ là ký hiệu của biến thiên, U và V là năng lượng biến dạng và công ảo do tải trọng cơ học bên ngoài. Do đó, U , V được định nghĩa bởi công thức (17):

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(n)} dV = \int_V (\sigma_{xx}^{(n)} \varepsilon_{xx}^{(n)} + \sigma_{yy}^{(n)} \varepsilon_{yy}^{(n)} + \sigma_{zz}^{(n)} \varepsilon_{zz}^{(n)} \\ &\quad + \tau_{xy}^{(n)} \gamma_{xy}^{(n)} + \tau_{xz}^{(n)} \gamma_{xz}^{(n)} \\ &\quad + \tau_{yz}^{(n)} \gamma_{yz}^{(n)}) dV \\ V &= - \int_\Omega q \bar{w} d\Omega \quad (17) \end{aligned}$$

Trong đó q là tải trọng phân bố và $\bar{w}$ là chuyển vị tương ứng.

Các phương trình cân bằng được thiết lập cho δU , δV và bằng cách tích phân từng phần các số gia hệ số của δu_0 , δv_0 , δw_b , δw_s , $\delta \varphi$, δu_z và δv_z theo các công thức (18):

$$\begin{aligned} \delta u_0: \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_6}{\partial y} &= 0 \\ \delta v_0: \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial N_6}{\partial x} &= 0 \\ w_b: \frac{\partial^2}{\partial x^2} M_1^b + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} M_6^b + \frac{\partial^2}{\partial y^2} M_2^b + q &= 0 \\ \delta w_s: \frac{\partial^2}{\partial x^2} M_1^s + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} M_6^s + \frac{\partial^2}{\partial y^2} M_2^s + \frac{\partial S_4^1}{\partial x} + \frac{\partial S_4^2}{\partial y} + q &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\delta u_z: \frac{\partial M_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial M_{61x}}{\partial y} = 0$$

$$\delta v_z: \frac{\partial M_{2x}}{\partial y} + \frac{\partial M_{62x}}{\partial x} = 0$$

$$\delta \varphi: \frac{\partial S_5^1}{\partial x} + \frac{\partial S_5^2}{\partial y} + P_3 + g(z)q = 0$$

Trong đó N_i , M_i^b , M_i^s , M_{ix} , P_i và S_i là kết quả của nội lực và mô men.

Kết quả của lực và mô men do nhiệt độ gây ra bao gồm N^T , M^{bT} , M^{sT} , M^{1T} , M^{2T} và P^T có thể được tính toán đối với dạng tải nhiệt theo các công thức (19):

$$\begin{aligned} \{N_i^{(k)T}, M_i^{(k)bT}, M_i^{(k)sT}\} &= \sum_{n=1}^3 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha^{(k)}(z) \{T\}^{(k)} \{1, z, f(z) - z\} dz \quad (i = 1, 2) \\ \{M_i^{(k)1T}, M_i^{(k)2T}\} &= \sum_{n=1}^3 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha^{(k)}(z) \{T\}^{(k)} \{\kappa^{(k)}, \lambda^{(k)}\} dz \\ \{P_i^{(k)T}\} &= \sum_{i=1}^3 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha^{(k)}(z) \{g'(z)\} \{T\}^{(k)} dz \quad (i = 3) \end{aligned} \quad (19)$$

Rời rạc phương trình dựa trên cơ sở NURBS

Phương pháp phân tử hữu hạn dựa trên cơ sở NURBS (dạng không đồng nhất của hàm B-spline) được sử dụng để mô tả lý thuyết biến dạng cắt, biến dạng dọc trục và phân tích ứng xử uốn của các tấm sandwich rỗng dưới tác dụng của tải trọng nhiệt. Trong nghiên cứu này, chỉ giới thiệu tóm tắt các thành phần cốt lõi của cơ sở NURBS, như sau:

Vectơ nút $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ là một tập hợp các số thực không giảm trong khoảng $\zeta = [\xi_1, \xi_{n+p+1}]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n + p + 1$ chỉ ra thành phần chính của các hàm cơ sở B-spline, i là chỉ số nút, n là số hàm cơ sở, and p là bậc đa thức. Dựa trên vectơ nút, các hàm cơ sở B-spline $B(\xi)_{i,p}$ được tính toán đệ quy bắt đầu của các hằng số từng phần $p = 0$ as

$$B_{i,0}(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \zeta < \xi_{i+1}, \text{ for } p = 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (20)$$

trong khi $p \geq 1$, thì

$$B_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} B_{i,p-1}(\zeta) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} B_{i+1,p-1}(\zeta), \text{ for } p \geq 1 \quad (21)$$

Các hàm cơ sở NURBS được sử dụng để trình bày các hình học cong phức tạp như hình cầu, hình tròn và hình trụ. Do đó, các bề mặt NURBS^{NURBS}(ζ, η) được biểu diễn bởi công thức (22):

$$\begin{aligned} S^{NURBS}(\zeta, \eta) &= \sum_{A=1}^{n \times m} R_A^{NURBS}(\zeta, \eta) P_A \\ R_A^{NURBS}(\xi, \eta) &= \frac{N_A^{B-spline}(\zeta, \eta) w_A}{\sum_{A=1}^{n \times m} N_A^{B-spline}(\zeta, \eta) w_A} \end{aligned} \quad (22)$$

trong đó $m \times n$ chỉ ra số lượng các hàm cơ sở, $R_A^{NURBS}(\xi, \eta)$ là các hàm cơ sở NURBS, và w_A là trọng số. Cơ sở NURBS có thể đạt được ít nhất C^{p-1} có tính liên tục trong toàn bộ phần cơ sở NURBS. Do đó, đối với $p \geq 2$, thì C^1 - yêu cầu về tính liên tục bậc nhất đối với các công thức gần đúng dựa trên giả thuyết 3D zig-zag, có thể dễ dàng đáp ứng bằng phương pháp IGA dựa trên cơ sở NURBS.

Bằng cách sử dụng các hàm cơ sở NURBS làm các hàm nội suy, các phép tính gần đúng của cả hình học x^h và trường chuyển vị u^h của tấm Sandwich có lỗ rỗng được xác định theo công thức (23):

$$\begin{aligned} x^h(\xi, \eta) &= \sum_{A=1}^{m \times n} R_A(\xi, \eta) P_A, u^h(\xi, \eta) = \\ &= \sum_{A=1}^{m \times n} R_A(\xi, \eta) q_A \end{aligned} \quad (23)$$

Trong đó P_A được xem như các điểm điều khiển, và $q_A = [u_{0A} \ v_{0A} \ w_{bA} \ w_{sA} \ \varphi_{xA} \ u_{zA} \ v_{zA}]$ bao gồm các bậc tự do tại nút liên quan đến điểm A. Lấy biến thiên của hàm năng lượng thể năng tổng quát, có thể suy ra phương trình đàn hồi để phân tích ứng xử uốn của các tấm Sandwich FG có lỗ rỗng do

tại trọng nhiệt gây ra như sau:

$$Kq = f^{th} \quad (24)$$

KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Trong bài nghiên cứu này, các ví dụ số liên quan đến phân tích uốn nhiệt của tấm FG Sandwich rỗng được thực hiện để đánh giá độ chính xác và hiệu quả của phương pháp được đề xuất trên cơ sở hình học NURBS. Trong đó, lưới 13×13 ($p=3$) được chọn để đạt được độ hội tụ của kết quả. Thêm vào, điều kiện biên của các tấm, với bốn cạnh biểu diễn bằng ký tự “S” cho gối tựa giản đơn (S) được biểu diễn như sau:

Simply supported (S):

$$\begin{cases} v_0 = w_b = w_s = v_z = 0 \text{ at } x = 0, a \\ u_0 = w_b = w_s = u_z = 0 \text{ at } y = 0, b \end{cases}$$

Các điều kiện của $u_0, v_0, w_b, w_s, \varphi, u_z, v_z$ được gán trực tiếp tại các nút biên như trong phương pháp FEM thông thường. Thêm vào, thành phần vật liệu chức năng FG cho tấm Sandwich rỗng được trình bày trên Bảng 1.

Bảng 1. Tính chất cơ lý của vật liệu chức năng FGM

Vật liệu	Tính chất cơ lý		
	$E(GPa)$	ν	$\alpha (\times 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1})$
Metal: Ti-6Al-4V	66,2	1/3	10,3
Ceramic: ZrO_2	117	1/3	77,11

Các kết quả phân tích cho ứng suất và chuyển vị do nhiệt gây ra đối với các tấm sandwich theo hai mô hình gồm loại A và B được trình bày kết hợp với nhiều cấu hình khác nhau của các lớp sandwich. Phân tích số được tiến hành bằng cách kết hợp phương pháp đẳng hình học và lý thuyết zig-zag Quasi-3D đã đề xuất, trong đó lý thuyết mới có xét đến các biến số quan trọng như sự kết nối thông qua bề mặt tiếp xúc của các lớp sandwich và ảnh hưởng đồng thời của yếu tố kéo giãn theo độ dày.

Để xác thực độ chính xác của phương pháp đề xuất, các tấm sandwich FGM đẳng hướng được phân tích, cho hai loại tấm sandwich FG (Loại A và Loại B), trong đó vật liệu biến đổi theo bề dày tấm dựa trên hệ số lũy thừa n , tỷ lệ $(\frac{a}{b})$ và các mô hình tỉ lệ của các lớp sandwich. Thêm vào, tấm sandwich FG rỗng, chịu tác dụng của tải nhiệt phân bố đều tác dụng lên bề mặt trên cùng tấm, và tấm này được ràng buộc bởi gối tựa đơn. Tất cả các kết quả, bao gồm chuyển vị, ứng suất dọc trục và ứng suất cắt ngang, được tính toán với tỷ lệ chiều dài trên bề dày tấm là $\frac{a}{h} = 10$. Ngoài ra, ảnh hưởng của lỗ rỗng cũng đã được xem xét trong nghiên cứu này, làm nổi bật những thay đổi trong ứng xử của tấm với hai mô hình sandwich, loại A và B. Chú ý rằng, các chuyển vị, ứng suất dọc và ứng suất cắt được trình bày bằng cách sử dụng các công thức không thứ nguyên, tạo điều kiện thuận lợi cho việc phân tích các kết quả số một cách dễ dàng hơn khi so sánh với các lời giải chính xác đã công bố. Các công thức không thứ nguyên cho các thành phần chuyển vị và ứng suất được trình bày như sau:

Bảng 2. So sánh chuyển vị không thứ nguyên $\bar{w}$ của tấm sandwich loại A ($\frac{a}{h} = 10$), ($T_3 = 0$, $T_2 = 100$), $n=3$

Mô hình	Lý thuyết	$\bar{w}$				
		$\frac{a}{b} = 1$	$\frac{a}{b} = 2$	$\frac{a}{b} = 3$	$\frac{a}{b} = 4$	$\frac{a}{b} = 5$
1-0-1	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,658153	0,270902	0,141810	0,088642	0,062334
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,655647	0,269820	0,141207	0,088243	0,062044
	Houri et al. ($\epsilon_z \neq 0$) ²⁶	0,658153	0,270902	0,14181	0,088642	0,062334
	Zenkour et al. ($\epsilon_z \neq 0$) ²⁵	0,658153	0,270902	0,14181	0,088642	0,062334
	Zenkour et al. ($\epsilon_z = 0$) ²⁵	0,683572	0,273492	0,136798	0,080512	0,052678

$$\text{Chuyển vị: } \bar{w} = \frac{h}{\alpha_0 T_2 a^2} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$$

$$\text{Ứng suất dọc trục: } \bar{\sigma} = \frac{h^2}{\alpha_0 T_2 E_0 a^2} \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) \quad (25)$$

$$\text{Ứng suất cắt: } \tau_{xz} = \frac{10h}{\alpha_0 T_2 E_0 a^2} \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right)$$

Để chứng minh sự ảnh hưởng của trường nhiệt biến thiên theo bề dày tấm ở công thức (11), nghiên cứu này đã phân tích một loạt các ví dụ để đánh giá ứng xử của các tấm sandwich thông qua phương pháp mới. Các bài toán có thể được tóm tắt ngắn gọn khi tính toán liên quan đến sự phân bố nhiệt độ tuyến tính $T = \bar{z}T_2$, sự phân bố nhiệt phi tuyến $T = \bar{\psi}(z)T_3$, và sự kết hợp của cả hai hàm nhiệt độ dựa trên công thức tổng quát $T = \bar{z}T_2 + \bar{\psi}(z)T_3$. Chú ý rằng, trong hầu hết các nghiên cứu đã công bố, các vấn đề tính toán chuyển vị và ứng suất do nhiệt độ được tính toán dựa trên giả định phân bố nhiệt độ trạng thái ổn định, và thông thường là sự phân bố nhiệt tuyến tính theo bề dày của tấm, do đó việc đánh giá ảnh hưởng của phân bố nhiệt phi tuyến cũng là điểm mới của nghiên cứu này.

Bảng 2 trình bày chuyển vị không thứ nguyên $\bar{w}$ trọng tâm của tấm sandwich (loại A) với các sơ đồ mô hình lớp sandwich khác nhau, trong đó các tham số đầu vào $\frac{a}{h} = 10$, nhiệt phân bố là tuyến tính khi $T_3 = 0$ và $T_2 = 100$, và hệ số lũy thừa $k = 3$. Các kết quả tính toán bằng phương pháp zig-zag giả 3D được so sánh với lời giải phân tích của các lý thuyết bậc cao hơn như TSDT và HSDT khi có xét và không xét đến hiệu ứng độ dày kéo giãn do Zenkour và Alghamdi đề xuất²⁵, của Houari và cộng sự²⁶ đối với tấm chịu tải nhiệt phân bố đều. Kết quả so sánh đã chỉ ra trên các mô hình sandwich (loại A) bố trí đối xứng và không đối xứng như 101, 212, 111, 221, 121 tương ứng với các mô hình 1,2,3,4,5 xét đến các lỗ rỗng và không có lỗ rỗng. Có thể thấy rằng chuyển vị trung tâm của tấm sandwich được tính toán gần như chính xác với các giá trị khác nhau của tỉ lệ $\frac{a}{b}$ tăng dần được trình bày trên. Bảng 2 Thêm vào, với hệ số rỗng được tính toán ($\alpha = 0.5$), chuyển vị uốn nhiệt của tấm sandwich loại A bị giảm đi, điều này có thể giải thích khi biến thiên nhiệt độ theo bề dày của tấm bị giảm, dẫn đến ứng suất kéo căng do nhiệt độ gây ra trong tấm là giảm, điều này tỉ lệ thuận với chuyển vị của tấm chịu tác dụng của tải nhiệt.

Phân tích sâu hơn ở bảng tính toán này, các chuyển vị tấm sandwich khi không xét đến ảnh hưởng của lỗ rỗng hoàn toàn trùng khớp với các kết quả tính toán từ lời giải giải tích của lý thuyết bậc cao HSDTs, có xét đến ảnh hưởng của yếu tố giãn dài theo bề dày tấm. Trong khi đó, kết quả số không xét đến ảnh hưởng của yếu tố này thì chuyển vị trung tâm của tấm sandwich thường lớn hơn, điều này được lý giải khi độ cứng tổng thể của kết cấu tăng bởi ảnh hưởng của biến dạng theo bề dày, đồng thời việc tích hợp tính liên tục qua các lớp vật liệu sandwich khi xét đến lý thuyết đề xuất zig-zag cũng là một yếu tố quan trọng làm cho kết quả trở nên tốt hơn.

	TSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²⁵	0,68356	0,27348	0,136786	0,080501	0,052667
	Mantari ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	0,658099	0,270846	0,141751	0,088579	0,062266
1-1-1	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,631600	0,259980	0,136105	0,085094	0,059862
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,617108	0,253923	0,132867	0,083024	0,058378
	Houri et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁶	0,6316	0,25998	0,136105	0,085094	0,059862
	Zenkour et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁵	0,6316	0,25998	0,136105	0,085094	0,059862
	Zenkour et al. ($\varepsilon_z = 0$) ²⁵	0,653671	0,261647	0,130971	0,077163	0,050554
	TSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²⁵	0,653638	0,261614	0,130939	0,077131	0,050522
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	0,631579	0,259958	0,136081	0,085067	0,05983
1-2-1	Phương pháp giả 3D ($\alpha=0$)	0,602743	0,248134	0,129933	0,081262	0,057192
	Phương pháp giả 3D ($\alpha=0.5$)	0,580247	0,238793	0,124982	0,078124	0,054958
	Houri et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁶	0,602744	0,248135	0,129933	0,081262	0,057192
	Zenkour et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁵	0,602744	0,248135	0,129933	0,081262	0,057192
	Zenkour et al. ($\varepsilon_z=0$) ²⁵	0,622467	0,249245	0,124837	0,07361	0,048277
	TSDT ($\varepsilon_z=0$) ²⁵	0,62242	0,249199	0,124791	0,073564	0,048231
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	0,60276	0,24815	0,129947	0,081273	0,057199
2-1-2	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,646475	0,266094	0,139295	0,087077	0,061244
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,638469	0,262718	0,137470	0,085897	0,060392
	Houri et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁶	0,646475	0,266094	0,139295	0,087077	0,061244
	Zenkour et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁵	0,646475	0,266094	0,139295	0,087077	0,061244
	Zenkour et al. ($\varepsilon_z=0$) ²⁵	0,670275	0,268228	0,134212	0,079029	0,05174
	TSDT ($\varepsilon_z=0$) ²⁵	0,670253	0,268206	0,13419	0,079007	0,051718
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	0,646428	0,266046	0,139245	0,087023	0,061185
2-2-1	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,614121	0,252758	0,132303	0,082701	0,058168
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,597464	0,245753	0,128520	0,080251	0,056383
	Houri et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁶	0,614121	0,252758	0,132303	0,082701	0,058168
	Zenkour et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁵	0,614121	0,252758	0,132303	0,082701	0,058168
	Zenkour et al. ($\varepsilon_z=0$) ²⁵	0,634175	0,253878	0,127112	0,074914	0,049101
	TSDT ($\varepsilon_z=0$) ²⁵	0,634139	0,253843	0,127077	0,074879	0,049066
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	0,614117	0,252753	0,132296	0,082691	0,058153

Phân tích tiếp theo của nghiên cứu này là tính toán ứng suất cắt qua các lớp sandwich, và việc đánh giá lý thuyết zig-zag giả 3D dựa trên ứng suất cắt là rất quan trọng, bởi vì để đạt được độ chính xác cao đòi hỏi lý thuyết đề xuất phải đảm bảo tính ổn định và tiệm cận với các mô hình giải tích của lý thuyết biến dạng cắt bậc cao HSDT và giả 3D. Nghiên cứu này sử dụng trường nhiệt tổng quát, tức là có xét thêm sự khuếch tán phi tuyến của nhiệt độ thông qua bề dày tấm sandwich để kiểm tra mức độ chính xác của lý thuyết zig-zag có xét và không xét ảnh hưởng của các lỗ rỗng. Các kết quả ứng suất cắt không thứ nguyên trình bày chi tiết trong Bảng 3 đã so sánh với các lời giải chính xác đạt được từ lý thuyết biến dạng cắt bậc cao được đề xuất bởi Tounsi và cộng sự²³. Tương ứng với kết quả của lỗ rỗng xuất hiện trong tấm, ứng suất cắt ngang cũng giảm nhanh, điều này hoàn toàn phù hợp với xu hướng của chuyển vị nhiệt giảm do lỗ rỗng gây ra trên kết cấu tấm. Phân tích chỉ ra rằng ứng suất cắt đạt được từ lý thuyết zig-zag đề xuất có xem xét

hoặc không xem xét biến dạng theo bề dày cho kết quả với sai số rất nhỏ và hoàn toàn tương thích với các hệ số lũy thừa n khác nhau trên mô hình sandwich FGM (loại A). Chú ý rằng phân tích đánh giá độ chính xác của phương pháp đề xuất không kể đến sự hiện diện của các lỗ rỗng bên trong tấm. Có thể giải thích Bảng 3 tính toán ứng suất cắt bằng cách sử dụng hàm phân phối nhiệt độ phi tuyến, được biểu thị là $\psi(z)=f(z)=h/(\pi \sin(\pi z/h))$. Kết quả tính toán ứng suất cắt cho thấy hoàn toàn phù hợp với các lời giải chính xác khi xem xét tác động của biến dạng theo bề dày. Đáng chú ý là những kết quả phân tích nhỏ hơn một chút so với những kết quả được dự đoán bởi lý thuyết của Mantari²⁴. Ngoài ra, ứng suất cắt ngang được tính toán với sự phụ thuộc tối thiểu vào từng mô hình lớp sandwich cụ thể ở từng hệ số lũy thừa n khác nhau. Sự đánh giá chính xác về ứng suất cắt thông qua mỗi lớp vật liệu chức năng FGM cung cấp cơ sở vững chắc để xác định tính ổn định và độ tin cậy của lý thuyết zig-zag đề xuất đối với mô hình tấm sandwich.

Bảng 3. So sánh ứng suất cắt $\bar{\tau}_{xz}$ của tấm Sandwich vật liệu chức năng FGM loại ($\frac{a}{h} = 10, T_3 = -100, T_2 = 100$)

n	Lý thuyết	$\bar{\tau}_{xz}$				
		1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2	2-2-1
0	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,762453	0,762453	0,762453	0,762453	0,762453
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,762454	0,381227	0,291779	0,448159	0,346147
	Houri et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁶	0,762438	0,762438	0,762438	0,762438	0,762438
	Zenkour et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁵	0,762438	0,762438	0,762438	0,762438	0,762438
	Zenkour et al. ($\varepsilon_z = 0$) ²⁵	0,574063	0,574063	0,574063	0,574063	0,574063
	TSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²⁵	0,466349	0,466349	0,466349	0,466349	0,466349
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	0,863015	0,863017	0,863022	0,863014	0,863018
1	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,916999	0,911180	0,922826	0,905142	0,914328
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,706081	0,273602	0,214479	0,317934	0,286239
	Houri et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁶	0,916983	0,911165	0,922812	0,905127	0,914313

	Zenkour et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁵	0,916983	0,911165	0,922812	0,905127	0,914313
	Zenkour et al. ($\varepsilon_z = 0$) ²⁵	0,564059	0,559957	0,566925	0,556662	0,562231
	TSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²⁵	0,696774	0,694817	0,705269	0,689077	0,697901
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	1,019997	1,009700	1,021192	1,004311	1,012863
2	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,919234	0,905802	0,930561	0,894505	0,916903
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,692852	0,223169	0,174561	0,259733	0,245671
	Houri et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁶	0,919218	0,905787	0,930546	0,894489	0,916889
	Zenkour et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁵	0,919218	0,905787	0,930546	0,894489	0,916889
	Zenkour et al. ($\varepsilon_z = 0$) ²⁵	0,696044	0,689620	0,711266	0,679194	0,699571
	TSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²⁵	0,565881	0,556769	0,571546	0,550567	0,564062
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	1,024605	1,003182	1,028106	0,992852	1,014690
3	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,923436	0,896688	0,930407	0,883329	0,914171
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,699911	0,202549	0,158632	0,234798	0,223508
	Houri et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁶	0,923419	0,896673	0,930393	0,883314	0,914156
	Zenkour et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁵	0,923419	0,896673	0,930393	0,883314	0,914156
	Zenkour et al. ($\varepsilon_z = 0$) ²⁵	0,697635	0,681516	0,710627	0,669256	0,69685
	TSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²⁵	0,568711	0,551237	0,571319	0,544027	0,562514
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	1,031528	0,99343	1,027607	0,981414	1,011794
4	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,931221	0,888785	0,928627	0,875388	0,911383
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,710475	0,192372	0,151462	0,221749	0,208341
	Houri et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁶	0,931204	0,888770	0,928612	0,875373	0,911369
	Zenkour et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁵	0,931204	0,888770	0,928612	0,875373	0,911369
	Zenkour et al. ($\varepsilon_z = 0$) ²⁵	0,702617	0,674664	0,708782	0,662291	0,694226
	TSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²⁵	0,573624	0,546464	0,570117	0,539446	0,560893
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	1,042022	0,985132	1,025595	0,973508	1,009040
5	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,940788	0,882540	0,926566	0,870206	0,909229
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,723570	0,186889	0,148091	0,214436	0,197292
	Houri et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁶	0,940770	0,882525	0,926543	0,870190	0,909225
	Zenkour et al. ($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁵	0,940770	0,882525	0,926543	0,870190	0,909225
	Zenkour et al. ($\varepsilon_z = 0$) ²⁵	0,709315	0,669326	0,706815	0,657748	0,692229
	TSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²⁵	0,579531	0,542724	0,568771	0,536526	0,559642
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	1,042022	0,985132	1,025595	0,973508	1,009040

Đối với tấm sandwich FG loại B, các chuyển vị tại trọng tâm của tấm, dựa trên công thức (29), đã được phân tích và đánh giá bằng cách sử dụng nhiều mô hình tương tự như mô hình sandwich loại A. Các tham số độ dày $\frac{a}{h} = 10$, trường nhiệt độ phân bố tuyến tính $T_2 = 100, T_3 = 0$ và tỉ lệ cạnh $\frac{a}{b}$ tăng dần từ 1 đến 5 được xem xét trong tấm. Kết quả chuyển vị thu được từ lý thuyết zig-zag giả 3D được đề xuất đã so sánh với các lời giải chính xác tính toán sử dụng lý thuyết bậc cao HSDT²⁴ và các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao khác, bao gồm các lý thuyết của Reddy (TSDT), Touratier (SSDT) và Karama (ESDT) đề xuất, và các phân tích từ tính toán theo lời giả của Tounsi et al.²³. Kết quả cho thấy chuyển vị có xu hướng nhỏ hơn so với lời giải giải tích tham khảo, và hoàn toàn phù hợp với giải thích được mô tả khi tính toán cho mô hình kết cấu tấm sandwich loại A ở bảng 2. Độ lớn chuyển vị tại trọng tâm của tấm sandwich loại B cũng thay đổi tùy thuộc vào các mô hình lớp sandwich khác nhau, ở đó độ dày của hai lớp mặt và lõi trong mô hình tấm sandwich loại B quyết định ứng xử khác biệt của mỗi mô hình lớp sandwich. Có thể thấy rằng, chuyển vị nhiệt của tấm sandwich loại B cũng giảm tương ứng theo xu hướng của Loại A khi có xét tới yếu tố lỗ rỗng

xuất hiện theo bề dày, do đó đối với các bài toán công nghiệp cần xem xét đến yếu tố độ rỗng này trong thiết kế để giảm thiểu các yếu tố chuyển vị nhiệt quá lớn gây hư hỏng nhưng vẫn đảm bảo yêu cầu chất lượng của kết cấu. Khi tỉ lệ cạnh $\frac{a}{b}$ tăng, độ lớn của chuyển vị trên tấm sandwich cũng giảm đi đáng kể, đây là xu hướng chung dự kiến được tính toán cho tất cả các mô hình Sandwich loại B. So sánh kết quả trong Bảng 2 và Bảng 4, rõ ràng chuyển vị của tấm sandwich loại A có ý nghĩa hơn đối với loại B tương ứng với từng sơ đồ lớp sandwich khác nhau. Do đó, việc lựa chọn sơ đồ lớp sandwich của mô hình nào là phù hợp, cho dù là loại A hay loại B đều rất quan trọng để tìm ra giải pháp hợp lý nhất cho các ứng dụng trong bài toán công nghiệp thực tế.

Như thể hiện trong Bảng 4, hiệu ứng kéo giãn theo bề dày tấm làm giảm kết quả độ võng cho khi tính toán với tỉ lệ $\frac{a}{b} < 3$ và hiệu ứng này trở nên rõ rệt hơn khi độ dày tấm tăng lên. Nhìn chung, tỷ lệ cạnh $\frac{a}{b}$ có ảnh hưởng trội hơn đến kết quả độ võng khi so sánh với hệ số lũy thừa n mô tả vật liệu FGM. Rõ ràng, yếu tố ảnh hưởng của độ giãn dài theo bề dày cần được tính đến khi áp dụng mô hình sandwich để đề xuất chính xác hơn cho các nghiên cứu trong tương lai.

Bảng 4. So sánh chuyển vị của tấm Sandwich rỗng vật liệu chức năng FGM (loại B) $n = 3$ ($\frac{a}{h} = 10, T_3 = 0, T_2 = 100$)

Mô hình	Lý thuyết	$\bar{w}$				
		$\frac{a}{b} = 1$	$\frac{a}{b} = 2$	$\frac{a}{b} = 3$	$\frac{a}{b} = 4$	$\frac{a}{b} = 5$
1-2-2	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,562817	0,231313	0,120799	0,075275	0,052742
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,557415	0,228743	0,119172	0,074038	0,051698
	Tounsi et al. ²³	0,578976	0,23156	0,115754	0,06807	0,04449
	SSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,578976	0,23156	0,115754	0,06807	0,04449

	TSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,578982	0,231566	0,11576	0,068076	0,044495
	ESDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,57897	0,231554	0,115749	0,068064	0,044484
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	0,562797	0,231291	0,120773	0,075245	0,052706
1-1-1	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,563963	0,231786	0,121045	0,075426	0,052844
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,560714	0,230065	0,119833	0,074422	0,051941
	Tounsi et al. ²³	0,580412	0,232119	0,116022	0,068217	0,044578
	SSDT ($\varepsilon_z=0$) ²³	0,580412	0,232119	0,116022	0,068217	0,044578
	TSDT ($\varepsilon_z=0$) ²³	0,580421	0,232128	0,116031	0,068226	0,044587
	ESDT ($\varepsilon_z=0$) ²³	0,580402	0,232109	0,116012	0,068208	0,044568
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	0,563961	0,231781	0,121037	0,075412	0,052822
1-2-1	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,564443	0,232012	0,121185	0,075530	0,052928
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,559531	0,229643	0,119663	0,074354	0,051921
	Tounsi et al. ²³	0,581997	0,23273	0,116309	0,06837	0,044665
	SSDT ($\varepsilon_z=0$) ²³	0,581997	0,23273	0,116309	0,06837	0,044665
	TSDT ($\varepsilon_z=0$) ²³	0,582011	0,232745	0,116323	0,068384	0,044679
	ESDT ($\varepsilon_z=0$) ²³	0,581982	0,232716	0,116294	0,068356	0,044651
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	0,564439	0,232005	0,121174	0,075513	0,052903
2-1-2	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,564211	0,231869	0,121075	0,075435	0,052843
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,561432	0,230328	0,119944	0,074473	0,051964
	Tounsi et al. ²³	0,580181	0,232033	0,115985	0,0682	0,04457
	SSDT ($\varepsilon_z=0$) ²³	0,580181	0,232033	0,115985	0,0682	0,04457
	TSDT ($\varepsilon_z=0$) ²³	0,580188	0,232041	0,115992	0,068207	0,044578
	ESDT ($\varepsilon_z=0$) ²³	0,580173	0,232026	0,115977	0,068192	0,044563
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	0,564202	0,231859	0,121061	0,075416	0,052816
2-2-1	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,566693	0,232964	0,121703	0,075867	0,053173
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,560746	0,230189	0,119983	0,074577	0,052092
	Tounsi et al. ²³	0,585807	0,234213	0,117015	0,068757	0,044894
	SSDT ($\varepsilon_z=0$) ²³	0,585807	0,234213	0,117015	0,068757	0,044894
	TSDT ($\varepsilon_z=0$) ²³	0,585829	0,234235	0,117037	0,06878	0,044916
	ESDT ($\varepsilon_z=0$) ²³	0,585783	0,234189	0,116992	0,068734	0,044872
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	0,566687	0,232955	0,12169	0,075847	0,053145

Ứng suất cắt không thứ nguyên cho các tấm sandwich loại B đã được phân tích theo sự phân bố của trường nhiệt tổng quát bao gồm sự thay đổi tuyến tính và phi tuyến tính kết hợp trên toàn bộ bề dày của tấm, lần lượt tương ứng với nhiệt độ $T_3 = -100$ liên quan đến hàm $\psi(z)$, $T_2 = 100$ với hàm z . Lý thuyết zig-zag giả 3D được đề xuất đánh giá thông qua các hệ số lũy thừa n của vật liệu FGM và các mô hình lớp sandwich khác nhau. Các kết quả số của ứng suất cắt dựa trên lý thuyết zig-zag giả 3D đã được so sánh với một số lời giải giải tích của lý thuyết biến dạng cắt bậc cao HSDT có xét và không xét đến hệ số biến dạng theo bề dày đã thảo luận trước đó. Các tính toán số được giả định rằng sự phân bố nhiệt độ phi tuyến tính, trong đó hàm được mô hình hóa bằng hàm $\sin(\frac{\pi z}{h})$ đã được chọn, là hoàn toàn phù hợp với hàm biến dạng $f(z)$ được mô tả trong của trường chuyển vị, cụ thể là $\psi(z) = f(z) = \frac{h}{\pi \sin(\frac{\pi z}{h})}$. Ứng suất cắt phân tích quan sát ở

Bảng 5 có sự thay đổi đáng kể giữa các lý thuyết khác nhau, tùy thuộc vào hiệu ứng biến dạng độ dày (stretching effect) có được xem xét hay không. Giá trị ứng suất cắt đối với các lý thuyết tính đến hiệu ứng kéo giãn thường cao hơn các lý thuyết không xét đến hiệu ứng này.

Nghiên cứu chứng minh rằng lý thuyết zig-zag giả 3D bảy biến được đề xuất tạo ra kết quả ứng suất cắt nhỏ hơn so với lý thuyết năm biến của Mantari, phù hợp với xu hướng được giải thích trong các bảng trước đó, với mô hình sandwich loại A. Sự nhất quán này phụ thuộc vào các hàm phân phối cho cả biến dạng và nhiệt độ. Rõ ràng, nếu chọn lựa hai hàm này khác nhau, kết quả có thể thay đổi đáng kể. Mức độ thay đổi này phụ thuộc vào lựa chọn hàm phân phối trường nhiệt độ, có ý nghĩa quan trọng đối với các ứng dụng thực tế. Việc cân nhắc cẩn thận các hàm này là điều cần thiết để đánh giá chính xác ứng xử uốn nhiệt của các bài toán sử dụng tấm sandwich với nhiều mô hình tương thích trong tương lai.

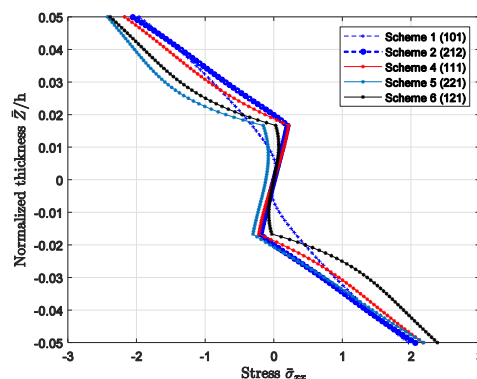
Bảng 5. So sánh ứng suất cắt không thứ nguyên $\bar{\tau}_{xz}$ của tấm sandwich loại B ($\frac{a}{h} = 10$) ($T_3 = -100$, $T_2 = 100$)

n	Lý thuyết	$\bar{\tau}_{xz}$				
		1-2-2	1-1-1	1-2-1	2-1-2	2-2-1
0	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,837394	0,787709	0,817554	0,789458	0,789458
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,718087	0,675173	0,708133	0,667534	0,667534
	Tounsi et al. ²³	0,63484	0,593473	0,618198	0,593749	0,593749
	SSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,63484	0,593473	0,618198	0,593749	0,593749
	TSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,512863	0,483594	0,50074	0,485205	0,485205
	ESDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,711266	0,717537	0,752081	0,715644	0,715644
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	1,03012	0,968793	1,005739	0,971823	0,971823

1	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,738888	0,673820	0,679393	0,669754	0,616187
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,654452	0,609755	0,625563	0,597748	0,598027
	Tounsi et al. ²³	0,556468	0,506552	0,510904	0,503367	0,46259
	SSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,556468	0,506552	0,510904	0,503367	0,46259
	TSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,452706	0,412275	0,415599	0,40989	0,376218
	ESDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,673909	0,61319	0,618781	0,609017	0,560375
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	0,911134	0,833192	0,839726	0,82839	0,763771
2	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,685096	0,608881	0,616722	0,596576	0,567490
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,612042	0,575936	0,598145	0,548962	0,592764
	Tounsi et al. ²³	0,515247	0,457581	0,463304	0,448325	0,425693
	SSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,515247	0,457581	0,463304	0,448325	0,425693
	TSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,419431	0,371598	0,376435	0,364374	0,345855
	ESDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,6236	0,555218	0,561816	0,543545	0,516221
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	0,846399	0,754851	0,764361	0,73928	0,704632
3	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,645887	0,575335	0,585482	0,558569	0,557419
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,583537	0,561365	0,592044	0,523728	0,604337
	Tounsi et al. ²³	0,485538	0,432335	0,439671	0,419756	0,417906
	SSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,485538	0,432335	0,439671	0,419756	0,417906
	TSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,395048	0,350601	0,356867	0,340784	0,339606
	ESDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,587968	0,52538	0,533729	0,509509	0,506632
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	0,799046	0,714227	0,726674	0,692856	0,692412
4	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,615850	0,559482	0,570716	0,540112	0,556079
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,562887	0,557724	0,594587	0,512753	0,615029
	Tounsi et al. ²³	0,462874	0,420409	0,428492	0,405887	0,41672
	SSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,462874	0,420409	0,428492	0,405887	0,41672
	TSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,376357	0,340633	0,347598	0,329301	0,338828
	ESDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,560929	0,511364	0,520457	0,493037	0,504883
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	0,76263	0,695081	0,70886	0,670349	0,690747
5	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0$)	0,592823	0,552783	0,564334	0,531726	0,556094
	Phương pháp giả 3D ($\alpha = 0.5$)	0,547513	0,559494	0,600400	0,509217	0,622067
	Tounsi et al. ²³	0,445532	0,415369	0,423636	0,399587	0,416587
	SSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,445532	0,415369	0,423636	0,399587	0,416587
	TSDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,362034	0,336364	0,343575	0,324042	0,338917
	ESDT ($\varepsilon_z = 0$) ²³	0,54027	0,505531	0,514681	0,485623	0,504398
	Mantari($\varepsilon_z \neq 0$) ²⁴	0,734637	0,68708	0,701195	0,660188	0,690685

Để biểu diễn một cách chi tiết và hiểu rõ hơn sự phân bố của các ứng suất, Hình 1 trình bày sự biến đổi ứng suất dọc trục theo bề dày của tấm sandwich FGM loại A với hệ số lũy thừa ($n = 3$), được phân tích theo nhiều sơ đồ lớp sandwich khác nhau. Ứng suất dọc trục là dương tương ứng với ứng suất kéo ở nửa dưới của tấm, trong khi ứng suất nén ở nửa bên trên. Đối

với các mô hình sandwich có các lớp FGM đối xứng, sự phân bố ứng suất dọc trục luôn đối xứng quanh trục trung hòa và ứng suất dọc liên tục trên toàn bộ chiều dày của tấm. Trong trường hợp đối với vật liệu chức năng FGM, ứng suất dọc thể hiện sự thay đổi phi tuyến trên toàn bộ chiều dày đối với mô hình sandwich loại A.



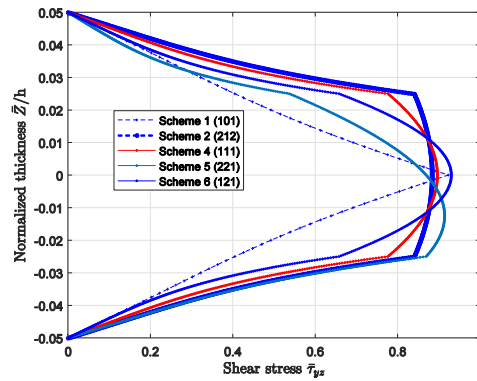
Hình 1. σ_{xx} phân bố qua bề dày tấm Sandwich, $\frac{a}{h} = 10$, $n = 3$, SSSS (loại A), $T_1 = 0$, $T_2 = 100$, $T_3 = 0$.

Hình 2 chứng minh sự phân bố ứng suất cắt trên toàn bộ bề dày của tấm sandwich FGM với các tham số đầu vào $\frac{a}{h} = 10$, $n = 3$. Rõ ràng là ứng suất cắt cực đại xảy ra ở mặt phẳng trung hòa của tấm sandwich FGM với các mô hình lớp sandwich đang xem xét. Khi phân tích các mô hình đối xứng, ở đó các đặc tính vật liệu

FGM và độ dày của lớp trên cùng và lớp dưới cùng giống hệt nhau, dẫn đến sự phân bố ứng suất cắt cũng đối xứng theo xu hướng chung. Tuy nhiên, trong các mô hình không đối xứng, ứng suất cực đại không xảy ra ở trục trung hòa mà thay vào đó bị dịch chuyển ra khỏi mặt phẳng trung tâm. Nghiên cứu này đã kết hợp hàm nhiệt độ phi tuyến

tính $\psi(z)$ để phân tích ứng xử ứng suất cắt. Kết quả phân tích cho thấy ứng suất cắt thay đổi đáng kể khi tham số phi tuyến tính $\psi(z)$ thay đổi, ngay cả khi

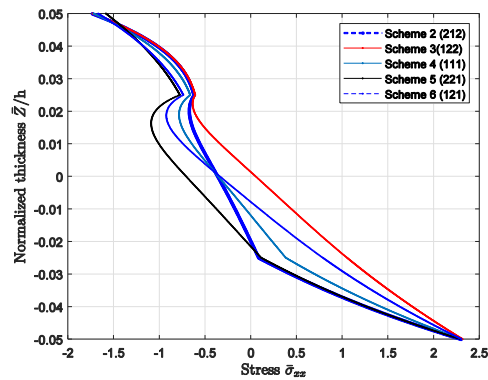
trường nhiệt cố định. Điều này chứng minh rằng phân bố ứng suất rất nhạy cảm với những thay đổi trong T_3 liên quan đến hàm $\psi(z)$.



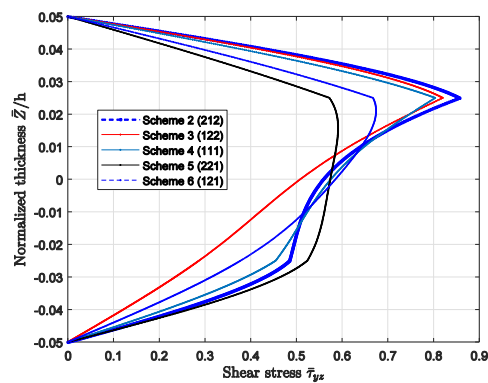
Hình 2. $\bar{\tau}_{xz}$ phân bố qua bề dày của tấm Sandwich rộng $\frac{a}{h} = 10$, $n = 3$, SSSS (loại A), $T_1 = 0$, $T_2 = 100$, $T_3 = -100$.

Đối với mô hình sandwich loại B, ứng suất dọc trục và ứng suất cắt ngang không thứ nguyên, được thể hiện tương ứng trong Hình 3 và Hình 4, luôn không đối xứng qua trục trung hòa. Kết quả cho thấy giá trị ứng suất dọc và ứng suất cắt thay đổi nhanh khi nhiệt độ tuyến tính T_2 được giữ không đổi trong khi nhiệt độ phi tuyến tính T_3 thay đổi ở $T_3 = -100, 0, 100$. Trong mô hình này, ứng suất cắt không duy trì ở phía

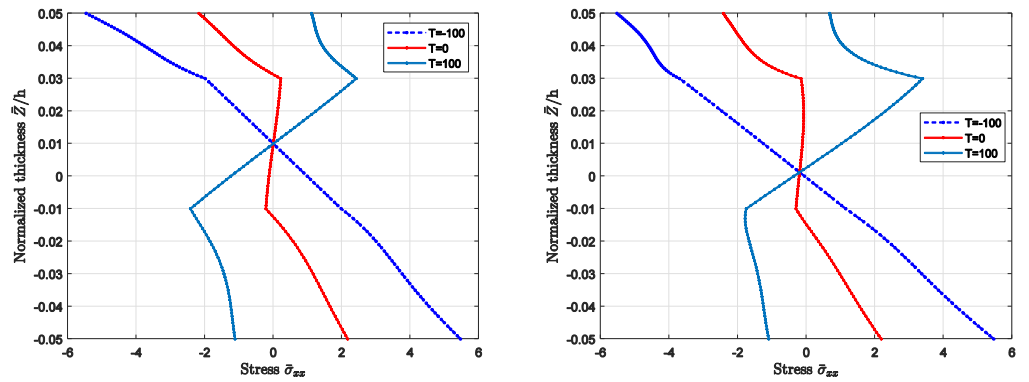
ứng suất dương mà chuyển từ kéo sang nén ở cả hai bên khi nhiệt độ thay đổi từ âm sang dương, được phân tích theo các Hình 5, Hình 6, Hình 7, Hình 8. Rõ ràng là sự phân bố nhiệt độ qua độ dày của tấm ảnh hưởng đáng kể đến sự phân bố ứng suất bên trong tấm Sandwich. Hiệu ứng này cũng bị ảnh hưởng một phần bởi sự thay đổi trong hệ số lũy thừa n trên vật liệu FGM.



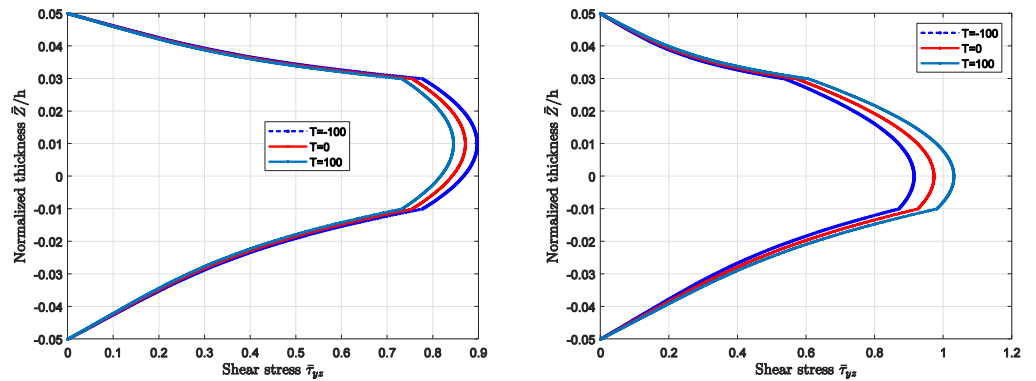
Hình 3. $\bar{\sigma}_{xx}$ phân bố qua bề dày của tấm Sandwich rộng $\frac{a}{h} = 10$, $n = 3$, SSSS (loại B), $T_1 = 0$, $T_2 = 100$, $T_3 = 0$.



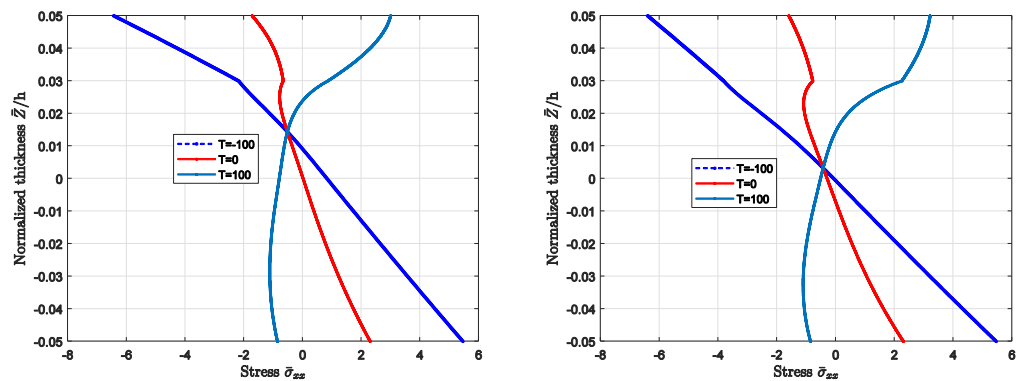
Hình 4. $\bar{\tau}_{xz}$ phân bố qua bề dày của tấm Sandwich rộng $\frac{a}{h} = 10$, $n = 3$, SSSS (loại B), $T_1 = 0$, $T_2 = 100$, $T_3 = -100$.



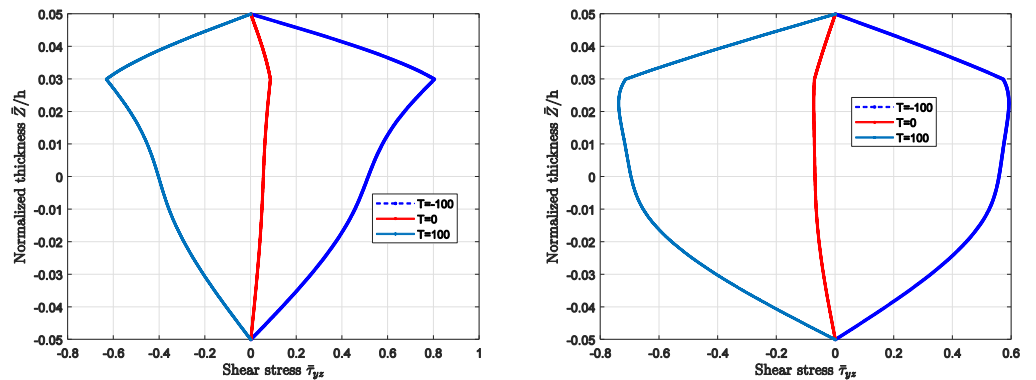
Hình 5. So sánh ảnh hưởng của nhiệt độ đối với ứng suất $\bar{\sigma}_{xx}$ với $\frac{a}{h} = 10$, $n = 3$, SSSS, $T_1 = 0$, $T_2 = 100$, $T_3 = -100, 0, 100$ của tấm Sandwich loại A. (a) mô hình đối xứng (111); (b) mô hình bất đối xứng (221).



Hình 6. So sánh ảnh hưởng của nhiệt độ đối với ứng suất $\bar{\tau}_{xz}$ với $\frac{a}{h} = 10$, $n = 3$, SSSS, $T_1 = 0$, $T_2 = 100$, $T_3 = -100, 0, 100$ của tấm Sandwich loại A. (a) mô hình đối xứng (111); (b) mô hình bất đối xứng (221)



Hình 7. So sánh ảnh hưởng của nhiệt độ đối với ứng suất $\bar{\sigma}_{xx}$ với $\frac{a}{h} = 10$, $n = 3$, SSSS, $T_1 = 0$, $T_2 = 100$, $T_3 = -100, 0, 100$ của tấm Sandwich loại B. (a) mô hình đối xứng (111); (b) mô hình bất đối xứng (221)



Hình 8. So sánh ảnh hưởng của nhiệt độ đối với ứng suất $\bar{\tau}_{xz}$ với $\frac{a}{h} = 10$, $n = 3$, SSSS, $T_1 = 0$, $T_2 = 100$, $T_3 = -100, 0, 100$ của tấm Sandwich loại B. (a) mô hình đối xứng (111); (b) mô hình bất đối xứng (221)

KẾT LUẬN

Trong bài báo này, lý thuyết zig-zag giả 3D kết hợp biến dạng theo bề dày đã được phát triển để phân tích sự uốn nhiệt cho các tấm sandwich vật liệu chức năng rỗng có nhiều mô hình lớp sandwich khác nhau. Nguyên lý chuyển vị ảo và phương trình cân bằng được sử dụng để suy ra các phương trình chủ đạo và đạt được sự cải tiến của ứng suất cắt liên tục qua bề mặt của các lớp tấm sandwich khi có lỗ rỗng tồn tại bên trong bề dày các lớp. Thêm vào, lời giải số của cơ sở NURBS được sử dụng để phân tích cho các tấm sandwich hình chữ nhật rỗng được phân theo hai loại A và B, kê trên các gối tựa đơn giản. Các tham số nghiên cứu liên quan đến thành phần tỉ lệ của thể tích vật liệu gồm bên trong vật liệu kim loại được xem xét thông qua hệ số lũy thừa n , hệ số rỗng α biến thiên thiên, và sự phân bố trường nhiệt độ thông qua độ dày của tấm được đánh giá một cách chi tiết. Để đánh giá khả năng của mô hình zig-zag giả 3D được đề xuất, các kết quả số từ mô hình đã được so sánh với các lý thuyết bậc cao từ lời giải chính xác có xét và không xét ảnh hưởng của biến dạng theo bề dày. Nhiều ví dụ trong nghiên cứu này đã xác thực các kết quả số của lý thuyết zig-zag giả 3D hiện tại, có thể phỏng đoán một cách chính xác ứng xử ứng uốn do nhiệt độ gây ra. Bằng việc phân tích ứng xử của tấm sandwich với 2 mô hình A, B có xét đến ảnh hưởng của hệ số lỗ rỗng, một số kết luận quan trọng khác có thể được nêu ra:

- Mô hình đề xuất có thể thỏa mãn điều kiện tương thích về ứng suất cắt qua bề mặt các lớp sandwich vật liệu chức năng. Thêm vào, các kết quả số tính toán từ mô hình là đạt yêu cầu với độ chính xác rất cao khi so sánh với các lý thuyết khác đã công bố trên lời giải giải tích, đặc biệt nghiệm phù hợp và xấp xỉ với lời giải 3D. Các kết quả của tính toán khi xét đến độ rỗng là hoàn toàn phù hợp với ứng xử của chuyển vị nhiệt trên tấm, do đó cần thiết để xem xét các yếu tố độ rỗng đến việc thiếu hụt hỏng phát sinh trong thiết kế đối với bài toán công nghiệp.
- Hiệu suất tốt của công thức tổng quát đề xuất đã được chứng minh khi xem xét sự biến thiên của vật liệu chức năng theo bề dày của luật lũy thừa, sự thay đổi tỉ lệ của chiều dài theo bề dày, tỉ lệ của kích thước cạnh, sự thay đổi của bề dày các lớp sandwich theo các mô hình (1-0-1), (1-1-1), (1-2-1), (2-1-2), (2-2-1).
- Ảnh hưởng đáng kể của trường nhiệt độ phi tuyến có xét đến kết quả chuyển vị và ứng suất, đặc biệt là sự thay đổi đáng kể của các ứng suất dọc trục và ứng suất cắt, mà ở đó các giá trị ứng suất này rất nhạy với các mô hình sandwich A, B. Do đó, thảo luận về ảnh hưởng của trường nhiệt độ phi tuyến tính cần được xem xét chi tiết thêm để đánh giá chính xác hơn cho các bài toán công nghiệp.
- Các lý thuyết tinh chỉnh hiện tại có đã cải tiến trường ứng suất cắt đi qua các lớp có kết hợp với ảnh hưởng biến dạng theo bề dày, điều này có thể cung cấp các dự đoán chính xác hơn cho các trường ứng suất cắt ngang, đặc biệt là đối với các tấm FGM dày. Tuy nhiên, hạn chế của phương pháp là chỉ mới xem xét ở một loại vật liệu cụ thể và chưa đánh giá đa dạng đối với nhiều loại vật liệu để xem xét mức độ ổn định của phương pháp, do đó cần có thêm các nghiên cứu tiếp theo để bổ sung vấn đề này.

DANH MỤC CÁC TỪ VIẾT TẮT

IGA: isogeometric analysis
 FGM: Functionally graded material
 Scheme: Cấu tạo, cơ chế
 Stress: Ứng suất
 Shear stress: Ứng suất cắt
 Normalized thickness: bề dày chuẩn hóa

Composite: hợp chất

XUNG ĐỘT LỢI ÍCH

Các tác giả đồng ý không có bất kỳ xung đột lợi ích nào liên quan đến các kết quả đã công bố.

ĐÓNG GÓP CỦA TÁC GIẢ

Đỗ Nguyễn Văn Vương thực hiện các ý tưởng, mô hình mới, lập trình, phân tích và viết bản thảo.

Võ Đức Cẩm Hải thực hiện kiểm tra bản thảo và giám sát.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 107.02-2021.75.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Betts C (2012). “Benefits of metal foams and developments in modelling techniques to assess their materials behaviour: a review”, *Materials Science and Technology*. 28:129–143. <https://doi.org/10.1179/026708311X13135950699290>.
2. Pabst W, Gregorová E, Tichá G (2007), “Effective properties of suspensions, composites and porous materials”, *Journal of the European Ceramic Society*. 27:479–482. <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2006.04.169>.
3. Qi S, Zhang P, Zhang G, Ren J, Yang C (2023), “Precise integration solutions for the static and dynamic responses of axially graded solid beams”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 147: 152–163. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.11.037>.
4. Liu Y, Su S, Huang H, Liang Y (2019), “Thermal-mechanical coupling buckling analysis of porous functionally graded Sandwich beams based on physical neutral plane”, *Composites Part B: Engineering*. 168:236–242. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.12.063>.
5. Wattanasakulpong N, Prusty BG, Kelly DW, Hoffman M (2012), “Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation”, *Mater Des*. 36:182–190. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.10.049>.
6. Joubaneh EF, Mojahedin AR, Jabbari M (2015), “Khorshidvand and M. Jabbari, Thermal buckling analysis of porous circular plate with piezoelectric sensor-actuator layers under uniform thermal load”, *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 17(1): 3–25. <https://doi.org/10.1177/1099636214554172>.
7. Brischetto S (2009), “Classical and mixed advanced models for Sandwich plates embedding functionally graded cores”. *J Mech Mater Struct*. 4(1):13–33.
8. Vel SS, Batra RC (2003), “Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates”, *Int J Solids Struct*. 40:7181–96. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00361-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00361-5).
9. Shojaeefard MH, Googarchin HS, Ghadiri M, Mahinzare M (2017), “Micro temperature-dependent FG porous plate: Free vibration and thermal buckling analysis using modified couple stress theory with CPT and FSDT”, *Applied Mathematical Modelling*. 50:633–655. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.06.022>.
10. Kitipornchai S, Chen D, Yang J (2017), “Free vibration and elastic buckling of functionally

- graded porous beams reinforced by graphene platelets”, *Materials and Design* 116:656–665. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2016.12.061>.
11. Behravan Rad A (2018), “Static analysis of non-uniform 2D functionally graded auxetic-porous circular plates interacting with the gradient elastic foundations involving friction force”, *Aerospace Science and Technology*. 76:315–339. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.01.036>
12. Karami B, Shahsavari D, Li L (2018), “Temperature-dependent flexural wave propagation in nanoplate-type porous heterogeneous material subjected to in-plane magnetic field”, *Journal of Thermal Stresses*, 41 (4):483–499. <https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1393781>
13. Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Roque CMC, Cinefra M, Jorge RMN (2012), “A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos B: Eng.* 43(2):711–25. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.08.009>
14. Karami B, Janghorban M, Li L (2018), “On guided wave propagation in fully clamped porous functionally graded nanoplates”, *Acta Astronautica* 143:380–390. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.12.011>
15. Wang YQ, Zu JW (2017), “Vibration behaviors of functionally graded rectangular plates with porosities and moving in thermal environment”. *Aerospace Science and Technology*, 69: 550–562. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.07.023>
16. Chen D, Yang J, Kitipornchai S (2016), “Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams. *International Journal of Mechanical Sciences*”. 108–109 :14–22. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.01.025>
17. Ryan G, Pandit A, Apatsidis DP (2006), “Fabrication methods of porous metals for use in orthopaedic applications”, *Biomaterials*. 2006; 27:2651–70. <https://doi.org/10.1016/j.biomaterials.2005.12.002>.
18. Ren S, Cheng C, Yu B, Meng Z, Huang B, Wu Q (2022), “New refined higher-order shear deformation theories for functionally graded plates conforming to graded variations of material properties”, *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 94: 104621. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104621>
19. Liu Y, Li Y, (2013), “Vibration and acoustic response of rectangular Sandwich plate under thermal environment”, *Shock Vib.* 20 (5): 1011–1030. <https://doi.org/10.3233/SAV-130801>
20. Sharma N, Tiwari P, Maiti DK, Maity D (2021), “Free vibration analysis of functionally graded porous plate using 3-D degenerated shell element”, *Composites Part C: Open Access*. 6: 100208. <https://doi.org/10.1016/j.jccome.2021.100208>
21. Mashat DS, Zenkour AM, Radwan AF (2020), “A quasi-3D higher-order plate theory for bending of FG plates resting on elastic foundations under hygro-thermomechanical loads with porosity”, *Eur. J. Mech. A Solids*. 82:103985. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.103985>
22. Foraboschi P (2013), “Layered plate with discontinuous connection: Exact mathematical model”. *Composites Part B: Engineering*. 47: 365–378. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.11.004>
23. Tounsi A, Houari MSA, Benyoucef S, Adda Bedia EA (2013). “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded Sandwich plates”, *Aerospace Sci Technol*. 24:209–20. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2011.11.009>
24. Mantari JL, Granados EV (2015), “Thermoelastic analysis of advanced Sandwich plates based on a new quasi-3D hybrid type HSDT with 5 unknowns”, *Composites Part B: Engineering*. 69: 317–334. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.10.009>
25. Zenkour AM, Alghamdi NA (2008), “Thermoelastic bending analysis of functionally graded Sandwich plates”, *J Mater Sci*. 43:2574–2589. <https://doi.org/10.1007/s10853-008-2476-6>
26. Houari MSA, Tounsi A, Bég OA (2013), “Thermoelastic bending analysis of functionally graded Sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 76102–111. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.09.004>
27. Ma R, Jin Q (2023), “Free Vibration Analysis of Functionally Graded Graphene-Reinforced Composite-Laminated Plates”, *Journal of Aerospace Engineering*. 36, 3. <https://doi.org/10.1061/JAEEZ.ASENG-465>

Thermal bending of sandwich fg porosity plates under the nonlinear thermal distribution effect with zig–zag quasi 3D theory using the NURBS basis functions

Vuong Nguyen Van Do^{1,*}, Vo Duc Cam Hai^{2,3}



Use your smartphone to scan this QR code and download this article

¹Applied Computational Civil and Structural Engineering Research Group, Faculty of Civil Engineering, Ton Duc Thang University, Ho Chi Minh City, Vietnam.

²Department of Computer Science, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Science, Ho Chi Minh City, Viet Nam.

³Vietnam National University, Ho Chi Minh City, Viet Nam

Correspondence

Vuong Nguyen Van Do, Applied Computational Civil and Structural Engineering Research Group, Faculty of Civil Engineering, Ton Duc Thang University, Ho Chi Minh City, Vietnam.

Email: donguyenvanvuong@tdtu.edu.vn

History

- Received: 23-12-2024
- Revised: 13-03-2025
- Accepted: 12-08-2025
- Published Online: 30-09-2025

DOI :

<https://doi.org/10.32508/stdjns.v9i3.1428>



Check for updates

Copyright

© VNUHCM Press. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International license.



ABSTRACT

With their exceptional mechanical properties, functionally graded materials (FGMs) are investigated among the most attractive reinforcement materials for industrial applications. This paper presents the investigation of the bending response of thick, porous, functionally graded (FG) rectangular sandwich plates based on the proposed approximate 3D zig–zag shear deformation theory. Two functions, $f(z)$ and $g(z)$ were incorporated into the analysis, representing higher-order shear deformation and transverse shear strain through the thickness of the FG plate, respectively. Additionally, the compatibility conditions of shear stress between layers in the present method address significant challenges in analyzing the thermal bending of thick FG plates. An improved transverse shear stress field was obtained and integrated into the proposed approximate 3D theory. Analytical solutions derived from various models, including higher-order analytical methods, were used to evaluate the performance of the proposed Quasi 3D zig–zag model. Using Hamilton's principle, equilibrium equations for porous FG sandwich plates were formulated. Numerical results demonstrated that the proposed model delivers promising results for thick sandwich plates, achieving excellent accuracy compared to analytical solutions. Moreover, the effects of volume fractions, aspect ratios, span-to-thickness ratios, boundary conditions, and typical linear and nonlinear temperature distributions across the plate thickness on the thermomechanical bending response of FG plates were investigated in detail. In conclusion, the proposed method could be considered a potential solution for accurately evaluating the behavior of structures under thermal loading and temperature distribution through the thickness.

Key words: Functionally graded material, thermal bending, isogeometric analysis, zig-zag Quasi 3D theory, NURBS, nonlinear thermal distribution

Cite this article : Van Do V N, Cam Hai V D. Thermal bending of sandwich fg porosity plates under the nonlinear thermal distribution effect with zig–zag quasi 3D theory using the NURBS basis functions. *Sci. Tech. Dev. J. - Nat. Sci.* 2025; 9(3):3452-3465.